Correction : **devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°3 sur les leçons suivantes :**

Equations inéquations systémes et polynomes

Exercice1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $x-5=-x\sqrt{5}+\sqrt{75}$ 2) $-5(2x+5)=-10x+2$

3) $5(2x-3)=12x-2(x+4)-7$

4) $(5x-1)^2-(5x-1)(x+1)=0$

5) $x^2-121=0$ 6) $\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}=0$

7) $\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-4}=0$ 8) $|5x-11|=|3+2x|$

9) $x^3-7x=0$

10) $x^3+27+2(x^2-9)-3x-9=0$

11) $\frac{\sqrt{2}x-1}{x-1}=\frac{2x-2}{\sqrt{2}x-2}$

Corrigé : 1) $x-5=-x\sqrt{5}+\sqrt{75}$

Équivaut à : $x+x\sqrt{5}=5+\sqrt{5\times 25}$

Équivaut à $x\left(1+\sqrt{5}\right)=5+5\sqrt{5}$

Équivaut à : $x=\frac{5+5\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{5\left(1+\sqrt{5}\right)}{1+\sqrt{5}}=5$

Et par suite : $S=\{5\}$

2) $-5(2x+5)=-10x+2$ équivaut à

$-10x-25=-10x+2$ équivaut à

$-10x+10x=25+2$ équivaut à $0x=27$

Équivaut à $0=27$ ceci est impossible

Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\varnothing$

3) $5(2x-3)=12x-2(x+4)-7$

Équivaut à $10x-15=12x-2x-8-7$

Équivaut à $10x-15=10x-2x-15$

Équivaut à $0=0$ donc tous les réels sont solutions

et par suite : $S=\mathbb{R}$

4) $(5x-1)^2-(5x-1)(x-1)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x-1)\left((5x-1)-(x-1)\right)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x-1)(5x-1-x+1)=0$

Ce qui est équivalent à : $(5x-1)(4x)=0$

Ce qui est équivalent à : $5x-1=0$ ou $4x=0$

Ce qui est équivalent à : $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{0}{4}=0$

Donc l'ensemble des Solutions est : $S=\{0;1/5\}$

5) $x^2-121=0$ équivalent à : $x^2-11^2=0$

C'est une identité remarquable de la forme :

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,

Équivalent à : $(x-11)(x+11)=0$

Équivalent à : $x-11=0$ ou $x+11=0$

Équivalent à : $x=11$ ou $x=-11$

D'où : $S=\{-11;11\}$

6) $\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}=0$ Cette équation est définie

si $x+1\neq 0$ ou $x-1\neq 0$.

si $x\neq -1$ ou $x\neq 1$.

Les valeurs interdites de cette équation sont -1 et 1.

Le domaine de l'équation est : $D_E=\{-1;1\}$

Le dénominateur commun est : $(x+1)(x-1)$

$\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}=0$ Équivalent à $\frac{1(x-1)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}=0$

Équivalent à $\frac{x-1-3x-3}{(x+1)(x-1)}=0$

C'est-à-dire : $\frac{-2x-4}{(x+1)(x-1)}=0$

Donc : $-2x-4=0$ équivalent à : $x=\frac{4}{-2}=-2$

-2 appartient à l'ensemble de définition de l'équation

d'où : $S=\{-2\}$

7) $\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-4}=0$ Cette équation existe si

$x^2-4\neq 0$

$x^2-4=0$ Équivalent à : $x^2-2^2=0$

Équivalent à : $(x+2)(x-2)=0$

Équivalent à $x+2=0$ ou $x-2=0$

Équivalent à : $x=-2$ ou $x=2$

Les valeurs interdites de cette équation sont -2 et 2.

L'équation est donc définie sur : $D_E=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$.

$\frac{(x-4)(x+2)}{x^2-4}=0$ Équivalent à $(x-4)(x+2)$

Équivalent à $x-4=0$ ou $x+2=0$

Équivalent à $x=4\in D_E$ ou $x=-2\notin D_E$

Donc : $S=\{4\}$

8) $|5x-11|=|3+2x|$

Équivalent à: $5x-11=3+2x$ ou $5x-11=-(3+2x)$

Équivalent à : $3x=14$ ou $7x=8$

Équivalent à $x=\frac{14}{3}$ ou $x=\frac{8}{7}$

Donc l'ensemble de toutes les Solutions est :

$S=\left\{\frac{14}{3};\frac{8}{7}\right\}$

9) $x^3-7x=0$ Équivalent à : $x\left(x^2-7\right)=0$

Équivalent à : $x=0$ ou $x^2-7=0$

Équivalent à $x=0$ ou $x^2=7$

Équivalent à : $x=0$ ou $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

D'où : $S=\left\{-\sqrt{7};0;\sqrt{7}\right\}$

10) $x^3+27+2\left(x^2-9\right)-3x-9=0$

Équivaut à : $x^3+3^3+2\left(x^2-3^2\right)-3(x+3)=0$

Équivaut à :

$(x+3)\left(x^2-3x+9\right)+2(x+3)(x-3)-3(x+3)=0$

car : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Équivaut à : $(x+3)\left[\left(x^2-3x+9\right)+2(x-3)-3\right]=0$

Équivaut à : $(x+3)\left(x^2-3x+9+2x-6-3\right)=0$

C'est-à-dire : $(x+3)\left(x^2-x\right)=0$

Équivaut à : $x(x+3)(x-1)=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x+3=0$ ou $x-1=0$

Équivaut à : $x=0$ ou $x=-3$ ou $x=1$

D'où : $S=\{-3;0;1\}$

11) $\frac{\sqrt{2}x-1}{x-1}=\frac{2x-2}{\sqrt{2}x-2}$

Cette équation n'existe pas si :

$x-1=0$ et si $\sqrt{2}x-2=0$

$x-1=0$ Équivaut à : $x=1$

$\sqrt{2}x-2=0$ Équivaut à : $x=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Les valeurs interdites de cette équation sont :

1 et $\sqrt{2}$.

L'équation est donc définie sur $D_E=\mathbb{R}\setminus\{1;\sqrt{2}\}$.

$\frac{\sqrt{2}x-1}{x-1}=\frac{2x-2}{\sqrt{2}x-2}$

Équivaut à : $\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(\sqrt{2}x-2\right)=(2x-2)(x-1)$

Équivaut à : $2x^2-2\sqrt{2}x-\sqrt{2}x+2=2x^2-2x-2x+2$

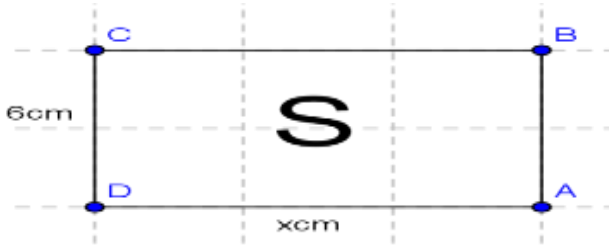
Équivaut à : $-3\sqrt{2}x+4x=0$

Équivaut à : $\left(-3\sqrt{2}+4\right)x=0$

Équivaut à : $x=0\in D_E$ d'où : $S=\{0\}$

Exercice2 : Quelle est la longueur d'un rectangle sachant que sa largeur est 6cm et sa surface vaut le double de son périmètre **?**

Corrigé :



Soit S La surface du rectangle $ABCD$

Et P Le périmètre **du** rectangle $ABCD$

Soit x La longueur du rectangle

On a donc : $S=6x$ et $P=2(6+x)=12+2x$

$S=2P$ Signifie $6x=2(12+2x)$

Signifie $6x=24+4x$ c'est-à-dire : $2x=24$

Signifie $x=\frac{24}{2}=12cm$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : 1) $-2x+6>0$ 2) $5x-15\le 0$

3) $-6x+7>x-7$

4) $(1-x)(2x+4)>0$ 5) $\frac{5x-2}{1+3x}\ge 0$

6) $\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}\ge 0$

Corrigé : 1) $-2x+6\succ 0$

$-2x+12=0$ Équivalent à : $x=6$

Et $-2=a$ on a : $a<0$ (coefficient de x négatif)

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	0	$-$

Donc : $S=]-\infty;3[$

2) $5x-15\le 0$

$5x-15=0$ Équivalent à : $x=3$

$5=a$ et $a>0$ (coefficient de x positif)

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$5x-15$	$-$	0	$+$

Donc : $S=]-\infty;3[$

3) $-6x+7>x-7$ équivalent à : $-7x>-14$

Équivalent à : $x<\frac{-14}{-7}$ donc : $x<2$

L'ensemble de solution est alors : $S=]-\infty;2[$

4) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$

Équivalent à : $2x+4=0$ ou $1-x=0$

Équivalent à : $x=-2$ ou $x=1$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x+4)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=]-2;1[$

5) (Signe d'un quotient méthode)

- Donner l'ensemble de définition.
- Rechercher les valeurs de x annulant chacun des facteurs et Dresser un tableau de signes :

Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+).et le quotient de deux nombres de signes différents est négatif.

$\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$

• Cette inéquation existe si $1+3x\neq 0$

$1+3x=0$ Équivalent à : $x=-\frac{1}{3}$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$.

L'inéquation est donc définie sur : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

• $5x-2=0$ Équivalent à : $x=\frac{2}{5}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$		$-$	0	$+$	

Attention à ne pas oublier la double barre pour la valeur interdite donc : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

6) $\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}\geq 0$ Signifie que $\frac{(2x+1)(1-x)}{(x+2)(x-2)}\geq 0$

a) On va déterminer le dommaine de définition de l'inéquation : Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2-4\neq 0$

Qui signifie que : $x\neq 2$ ou $x\neq -2$

Donc: le dommaine de définition de l'inéquation est : $D_I=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

b) Résolvons l'inéquation:

$1-x=0$ Signifie que: $x=1$

$2x+1=0$ Signifie que: $x=\frac{-1}{2}$

Donc le tableau des Signes est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(2x+1)(1-x)}{x^2-4}$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	

Par suite: $S=\left]-2;-\frac{1}{2}\right]\cup[1;2[$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$

c) $x^2+3x+10=0$

Solution :a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4\times 2\times(-6)=49$.

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$ donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$

Et le trinôme $2x^2-x-6$ à une forme factorisée :

$2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

C'est-à-dire : $2x^2-x-6=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)=(2x+3)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation

$2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc :$\Delta = b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times\frac{9}{8}=0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ à une forme factorisée : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation

$x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2-4ac=3^2-4\times 1\times 10=-31$.

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle. C'est-à-dire : $S=\varnothing$

Et on ne peut pas factoriser $x^2+3x+10$

Exercice5 : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus .
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés
Et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60 = np$ et $60 = (n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2 + 3n - 180 = 0$

Calcul du discriminant: $\Delta = 729 > 0$ Les solutions sont :

$n_1 = \frac{-3+\sqrt{729}}{2\times 1} = 12$ et $n_2 = \frac{-3-\sqrt{729}}{2\times 1} = -15$

Nous rejetons $n_2 = -15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

Exercice6 : Soit le trinôme

$(E) : P(x) = -3x^2 + \sqrt{3}x + 3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer.

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$; $\alpha \times \beta$;

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3 + \beta^3$

Solution : 1) : $a = -3$ et et $b = \sqrt{3}$ et $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{3}^2 - 4\times(-3)\times 3 = 3 + 36 = 39$

Comme $\Delta > 0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

Donc $\alpha + \beta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha \times \beta = \frac{3}{-3} = -1$

Et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

On a : $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Donc $(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

Donc $\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2(-1) = \frac{3}{9} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{7}{3}}{-1} = -\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$

C'est-à-dire : $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc : $\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{9}$

Exercice7: Résoudre les inéquations suivantes

a) $4x^2 - 8x + 3 \le 0$

b) $x^2 - 3x - 10 < 0$ c) $2x^2 - 4x + 6 \ge 0$

Solution : a) $4x^2 - 8x + 3 \le 0$ $a = 4$

Étudions le signe du trinôme :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times 4\times 3 = 64 - 48 = 16 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{8+4}{2\times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$3x^2-4x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

b) $x^2 - 3x - 10 < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S =]-2, 5[$

c) $2x^2 - 4x + 6 \ge 0$ $a = 2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc :

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 48 = -32 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2-4x+6$		$+$	

Par suite : $S = \mathbb{R}$

Exercice8 : A)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x^2 - 3x - 2 = 0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ b) $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ c) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ d) $2x^3 - 3x^2 = 2x$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2 + x - 6 = 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante :

$(E) : x^2 - |x-2| - 4 = 0$

Solution : A)1) $2x^2-3x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation

$2x^2-3x-2=0$:a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$ Donc : $S=\left\{-\dfrac{1}{2};2\right\}$

2) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq 0$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Signifie : $2\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}-2=0$

Car $\sqrt{x}^2=x$ et faisons un changement de variable

En posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\dfrac{1}{2}$ ou $X=2$

Signifie que : $\sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$

C'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $2x^2-3|x|-2=0$

Signifie que : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant : $X=|x|$

nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a: $X=-\dfrac{1}{2}$ ou $X=2$

Qui est équivalent à : $|x|=-\dfrac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie que : $x=2$ ou $x=-2$

Par suite $S=\{-2;2\}$

2) c) $2x^4-3x^2-2=0$

Signifie que : $2\left(x^2\right)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable

On pose : $X=x^2$ nous obtenons donc :

L'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a: $X=-\dfrac{1}{2}$ ou $X=2$

Par suite : $x^2=-\dfrac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3-3x^2=2x$ équivalent a: $2x^3-3x^2-2x=0$

Signifie que : $x\left(2x^2-3x-2\right)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $2x^2-3x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x_1=-\dfrac{1}{2}$ ou $x_2=2$

Par suite : $S=\left\{-\dfrac{1}{2};0;2\right\}$.

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

$x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$:

a = 1, b = 1 et c = - 6

Donc : $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4 \times 1 \times (-6) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1}=-3$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1}=2$ Donc : $S=\{-3;2\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$:

a = 1, b = -1 et c = - 2

Donc : $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2\times 1}=-1$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2\times 1}=2$ Donc : $S=\{-1;2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante : (E) : $x^2-|x-2|-4=0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$

C'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Or: d'après B) 1) $x_1=-1$ et $x_2=2$

Mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\leq 0$

Donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$

C'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$ Or: d'après B) 1)

$x_1=-3$ et $x_2=2$ Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$

donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

Exercice9 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases}2x^2-5y^2=1\\4x^2+3y^2=15\end{cases}$$

Solution: On pose : $X=x^2$ et $Y=y^2$

Le système devient : $\begin{cases}2X-5Y=1\\4X+3Y=15\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve: $X=3$ et $Y=1$

Donc : $x^2=3$ et $y^2=4$

Donc : $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$ et $y=\sqrt{1}$ ou $y=-\sqrt{1}$

Donc : $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$ et $y=1$ ou $y=-1$

Par suite : $S=\{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1),(-\sqrt{3},1),(-\sqrt{3},-1)\}$

Exercice10 : 1) résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

2) En déduire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{-7}{x}-\dfrac{3}{y}=4\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\end{cases}$$

Solution: 1) Le déterminant du système est :

$$\Delta=\begin{vmatrix}-7&-3\\4&5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq 0$$

Donc : $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4&-3\\-2&5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{14}{23}$ **et** $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}-7&4\\4&-2\end{vmatrix}}{-23}=\dfrac{2}{23}$

Donc : $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

2) Pour que le système existe il faut que : $x\neq 0$ et $y\neq 0$

$$\begin{cases}-7\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{y}=4\\4\dfrac{1}{x}+5\dfrac{1}{y}=-2\end{cases}$$ On pose : $X=\dfrac{1}{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$

Le système devient : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\4X+5Y=-2\end{cases}$

D'après 1) on a : $X=-\dfrac{14}{23}$ et $Y=-\dfrac{2}{23}$

Donc : $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{14}{23}$ et $\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{23}$ Donc : $x=-\dfrac{23}{14}$ et $y=\dfrac{23}{2}$

Par suite : $S=\left\{\left(-\dfrac{23}{14},\dfrac{23}{2}\right)\right\}$

Exercice11 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases}(x^2-3x+1)+(y^2-5y+4)=-3\\2(x^2-3x+1)-3(y^2-5y+4)=4\end{cases}$$

Solution: On pose : $X=x^2-3x+1$ et $Y=y^2-5y+4$

Le système devient : $\begin{cases}X+Y=-3\\2X-3Y=4\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve :

$X=-1$ et $Y=-2$

Donc : $x^2-3x+1=-1$ et $y^2-5y+4=-2$

Donc : $x^2-3x+2=0$ et $y^2-5y+6=0$

On résolve l'équation : $x^2-3x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$

Donc : $x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$ **et** $x_2=\dfrac{-(-3)-1}{2}=1$

On résolve l'équation $y^2-5y+6=0$:

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$

Donc : $y_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ **et** $y_2=\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$

Par suite on a : $S=\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\}$

Exercice 12: Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$$

Solution : Méthode1: $\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=5-y\\(5-y)\times y=4\end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$

C'est-à-dire : $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $y_1=\dfrac{5-\sqrt{9}}{2a}=\dfrac{5-3}{2\times1}=1$ et $y_2=\dfrac{5+\sqrt{9}}{2a}=4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Méthode2 : Pour résoudre le système :

(I) $\begin{cases}x+y=s\\x\times y=p\end{cases}$ Où les s, p sont des réels donnés

Il suffit de résoudre l'équation : $x^2 - sx + p = 0$

Dans notre exercice : on va résoudre l'équation :

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Et on finit de la même façon que la méthode1 .

Exercice13 : Soit le polynôme :

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 2$ et Montrer que : $P(x) = (x+2)Q(x)$ et determiner $Q(x)$

3) Determiner une factorisation du polynôme $P(x)$ en polynômes de 1ere degrés

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) < 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) < 0$

Solution:

1) $P(-2) = 2\times(-2)^3 - (-2)^2 - 13\times(-2) - 6 = -16 - 4 + 26 - 6 = 0$

Donc : -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Puisque -2 est racine du polynôme $P(x)$ alors $P(x)$ est divisible par $x - (-2)$

C'est-à-dire $P(x)$ soit divisible par $x + 2$

Effectuons la division euclidienne de : $P(x)$ par $x + 2$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x + 2 \\ \hline -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x - 3 \\ \cline{1-1} \quad -5x^2 - 13x - 6 & \\ \quad 5x^2 + 10x & \\ \cline{1-1} \quad\quad -3x - 6 & \\ \quad\quad 3x + 6 & \\ \cline{1-1} \quad\quad 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x) = (x+2)Q(x)$

avec: $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

3) $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$ On va chercher les racines de $Q(x)$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{49}}{2\times 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{49}}{2\times 2} = 3$

Donc: $Q(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)$

Donc: $Q(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 3)$

C'est-à-dire : $Q(x) = (2x+1)(x-3)$

Donc: $P(x) = (x+2)(2x+1)(x-3)$

4) $P(x) = 0$ ssi $(x+2)(2x+1)(x-3) = 0$

Ssi $x + 2 = 0$ ou $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

Ssi $x = -2$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = 3$

D'où : $S = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 3\right\}$

5) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) < 0$

$x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 3$ sont les racines

D'ou le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S = \left]-\dfrac{1}{2}; 3\right[$

6) $P(x) < 0$

le tableau de signe est le suivant:

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S =]-\infty; -2[\cup \left]\dfrac{-1}{2}; 3\right[$

Exercice14 : Soit le polynôme suivant (E) :

$P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que

$P(x) = (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}\right)$

3) On pose : $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}$

Soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x - \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\le 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$:

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$\left(x+1\right)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

3) a) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$:

$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$ On a $\Delta\succ 0$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$ car $\sqrt{2}-1\succ 0$

$x_2=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ et $x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Donc : $S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

4) Recherche des solutions de l'équation :

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ Peut s'écrire sous la forme :

$\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$

On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions

Sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ **et** $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

C'est à dire : $x_1=2$ et $x_2=1$ par suite: $S=\{2,1\}$

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$:

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x=-1$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=1$

On a donc : $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\le 0$

$P(x)\le 0$ Signifie que :

$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\le 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

On a donc : $S=]-\infty,-1]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$