Correction : **devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°2 sur les leçons suivantes :**

Ensemble des nombres réels et sous-ensembles et la droite dans plan

Exercice01 : Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1) $|2x-1|=1$ 2) $|x-3|=|4x-1|$

3) $|3x-1|<2$ 4) $|x+3|\geq 1$

5) $\begin{cases}-7<x\\ x-2\geq 0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}-7\langle x\langle 10\\ -3\leq x\leq 0\end{cases}$ **7)** $|5x+3|=-15$

Solution :1) $|2x-1|=1$ ssi $2x-1=1$ ou $2x-1=-1$

Ssi $2x=2$ ou $2x=0$ ssi $x=1$ ou $x=0$ donc $S=\{0;1\}$

2) $|x-3|=|4x-1|$ ssi $x-3=4x-1$ ou $x-3=-(4x-1)$

Ssi $-3x=2$ ou $x-3=-4x+1$ ssi $x=-\frac{2}{3}$ ou $5x=4$

Ssi $x=-\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{4}{5}$ donc : $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right\}$

3) $|3x-1|<2$ ssi $-2<3x-1<2$

Ssi $-2+1\leq 3x-1+1\leq 2+1$ ssi $-1\leq 3x\leq 3$

Ssi $-1\times\frac{1}{3}\leq 3x\times\frac{1}{3}\leq 3\times\frac{1}{3}$ ssi $-\frac{1}{3}\leq x\leq 1$

Donc : $S=\left]-\frac{1}{3};1\right[$

4) $|x+3|\geq 1$ ssi $x+3\geq 1$ ou $x+3\leq -1$

Ssi $x\geq -2$ ou $x\leq -4$ ssi $x\in[-2;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;-4]$

Donc : $S=]-\infty;-4]\cup[-2;+\infty[$

5) $\begin{cases}-7<x\\ x-2\geq 0\end{cases}$

$-7<x$ ssi $x\in]-7,+\infty[$

$x-2\geq 0$ ssi $x\geq 2$ ssi $x\in[2,+\infty[$

Donc : $S=]-7,+\infty[\cap[2,+\infty[=[2,+\infty[$

6) $\begin{cases}-7\langle x\langle 10\\ -3\leq x\leq 0\end{cases}$

$-7\langle x\langle 10$ ssi $x\in]-7;10[$

$-3\leq x\leq 0$ ssi $x\in[-3;0]$

Donc : $S=]-7,10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

7) $|5x+3|=-15$ n'a pas de solutions car la valeur absolue est toujours positive donc : $S=\varnothing$

Exercice02 : On pose : $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$

1) Montrer que : $b-a=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2) Comparer a et b

Solution :

1) $b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14}$

$b-a=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2)on a : $b-a=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

Or on a : $8>5\sqrt{2}$ car $(8)^2=64$ et $(5\sqrt{2})^2=50$

Donc : $8-5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ donc : $\frac{8-5\sqrt{2}}{14}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite : $b>a$

Exercice03 : a un nombre réel

Comparer : $4a-1$ **et** $4a^2$

Solution : On a

$4a^2-(4a-1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\geq 0$

Donc : $4a^2\geq 4a-1$ si $a\in\mathbb{R}$

Exercice04 :

Soit x un élément de l'intervalle $]-1,+\infty[$

Comparer : 12 **et** $-5x+1$ on utilisant les propriétés de l'ordre

Solution : On a $x\in]-1;+\infty[$ donc : $x\succ -1$

Donc : $-5x\prec -5\times(-1)$ donc : $-5x\prec 5$

Donc : ① $-5x+1\prec 6$ et on sait que : $6\prec 12$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-5x+1\prec 12$

Exercice05 : factorisez les expressions suivantes :

$A=16x^2-8x+1$ $B=8x^3-1$ $C=x^5+x^3-x^2-1$

$D=x^4-49$ $E=x^3+8+2(x^2-4)-(x+2)$

Solution : $A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times 4x\times 1+1^2=(4x-1)^2$

Pour $B=8x^3-1$ on Remarque que :

$B=8x^3-1=(2x)^3-1^3$ Identité remarquable du type :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$B=(2x-1)\left((2x)^2+2x\times 1+1^2\right)=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$C=x^3(x^2+1)-(x^2+1)=(x^2+1)(x^3-1)=(x^2+1)(x^3-1^3)$

$C=(x^2+1)(x-1)(x^2-x\times 1+1^2)=(x^2+1)(x-1)(x^2-x+1)$

$D=x^4-49=x^4-(\sqrt{7})^4=(x^2)^2-\left(\sqrt{7}^2\right)^2$

$D=\left(x^2-\sqrt{7}^2\right)\left(x^2+\sqrt{7}^2\right)=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)$

$E=x^3+8+2(x^2-4)-(x+2)$

$E=x^3+2^3+2(x^2-2^2)-(x+2)$

$E=(x+2)(x^2-2x+2^2)+2(x-2)(x+2)-(x+2)\times 1$

$E=(x+2)\left(\left(x^2-2x+2^2\right)+2(x-2)-1\right)$

$E=(x+2)\left(x^2-2x+4+2x-4-1\right)$

$E=(x+2)\left(x^2-1\right)$

<u>Exercice06 :</u> On pose $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Donner le signe de : B

2) Calculer B^2

3) Donner une écriture simplifiée de B

<u>Solution :</u> $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) On Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Donc: $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\in\mathbb{R}^{*-}$ cad $B<0$

2) $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=12-2\sqrt{6^2-20}=12-2\sqrt{16}$

Donc : $B^2=12-2\times4=4$

3) $B^2=4$ ssi $B=\sqrt{4}$ ou $B=-\sqrt{4}$

Donc : $B=2$ ou $B=-2$ or $B<0$ donc : $B=-2$

<u>Exercice07 :</u> Effectuer et Calculer et simplifier **<u>:</u>**

$A=\left(3+\sqrt{11}\right)^2-\left(3-\sqrt{11}\right)^2$ $\quad B=\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2015}\times\left(4\sqrt{3}+7\right)^{2015}$

$C=\dfrac{3\times10^{-5}\times7,2\times10^{7}}{2\times15^3}$ $\quad D=\dfrac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

<u>Solution :</u>

$A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2\right)$

$A=3+2\sqrt{33}+11-\left(3-2\sqrt{33}+11\right)=3+2\sqrt{33}+11-3+2\sqrt{33}-11=4\sqrt{33}$

$B=\left(\left(4\sqrt{3}-7\right)\left(4\sqrt{3}+7\right)\right)^{2015}=\left(\left(4\sqrt{3}\right)^2-(7)^2\right)^{2015}=(48-49)^{2015}=(-1)^{2015}=-1$

$C=\dfrac{3\times10^{-5}\times7,2\times10^{7}}{2\times15^3}=\dfrac{3\times10^{-5}\times3^2\times2^3\times10^{-1}\times10^{7}}{2\times(3\times5)^3}$

$C=\dfrac{3\times3^2\times2^3\times10}{2\times3^3\times5^3}=\dfrac{3\times3^2\times2^3\times2\times5}{2\times3^3\times5^3}=\dfrac{2^3}{5^2}=\dfrac{8}{25}$

$D=\dfrac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\dfrac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times\left(-2^3\right)^{-4}}=\dfrac{-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times\left(-2^3\right)^{-4}}$

$D=-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$

$F=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

On pose : $x=200520052006$ donc :

$200520052007=x+1$ et $200520052005=x-1$

Donc : $F=x^2-(x-1)(x+1)=x^2-x^2+1=1$

<u>Exercice08 :</u>1) Montrer que : $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) Montrer que : $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

<u>Solution :</u>1) On pose : $B=\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer : B^2;

$B^2=\left(\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$

$B^2=\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\left(\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}\right)}+\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}$

$B^2=6+2\sqrt{\dfrac{36-1}{4}}=6+2\sqrt{\dfrac{5}{4}}=6+\sqrt{5}$

Donc : $B^2=6+\sqrt{5}$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

D'où: $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$??

On pose : $B=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$ calculons B^2?

$B^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$

$B^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$

$B^2=18+2\sqrt{81-79}=18+\sqrt{8}$

Donc : $B^2=18+\sqrt{8}$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $B=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Par suite : $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

<u>Exercice09 :</u> a et b deux nombres réels tel que :

$a\geq-2$ et $b\leq-1$ et $a-b=6$

1) Simplifier : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}$

2) Montrer que : $a\leq5$ et $b\geq-8$

3) Calculer la valeur de : $B=|a+b-4|+|a+b+10|$

<u>Solution :</u>1) $a\geq-2$ ssi $a+2\geq0$ et $b\leq-1$ ssi $b+1\leq0$

On a : $A=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}=|a+2|+|b+1|$

$A=a+2-(b+1)=a-b+1=6+1=7$

2) Montrons que : $a\leq5$

On sait que : $b\leq-1$ et $a-b=6$

Donc : $a-6=b$ et $b\leq-1$

Donc : $a-6\leq-1$ donc $a\leq5$

Montrons que : $b\geq-8$

On sait que : $a\geq-2$ et $a-b=6$ donc : $b+6\geq-2$

Donc : $b\geq-2-6$ donc : $b\geq-8$

3)on a : $-2\leq a\leq5$ et $-8\leq b\leq-1$ donc : $-10\leq a+b\leq4$

Donc : $-14\leq a+b-4\leq0$ et $0\leq a+b+10\leq14$

Donc : $|a+b-4|=-(a+b-4)=-a-b+4$

Et on a donc : $|a+b+10|=a+b+10$

Donc : $B=|a+b-4|+|a+b+10|=-a-b+4+a+b+10$

Donc : $B=14$

Exercice10: Soit $a \geq 1$ on pose : $A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

1) Montrer que : $a(A+1)(A-1)=1$

2)a) Montrer que : $2 \leq A+1 \leq 3$

b) En déduire que : $1+\frac{1}{3a} \leq A \leq 1+\frac{1}{2a}$

3) Montrer que : $1{,}1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1{,}2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Solution : 1) $a \geq 1$ et $A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

Montrons que : $a(A+1)(A-1)=1$?

On a : $(A+1)(A-1)=A^2-1=\left(\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)^2-1$

$(A+1)(A-1)=1+\frac{1}{a}-1=\frac{1}{a}$ Donc : $(A+1)(A-1)=\frac{1}{a}$

Donc : $a(A+1)(A-1)=1$

2) Montrons que : $2 \leq A+1 \leq 3$?

On a : $a \geq 1 > 0$ donc : $\frac{1}{a} \geq 0$ donc : $\frac{1}{a}+1 \geq 1$

Donc : $A \geq 1$ donc : $A+1 \geq 2$ (1)

On a : $a \geq 1$ donc : $\frac{1}{a} \leq 1$ donc : $1+\frac{1}{a} \leq 2$

Donc : $A \leq \sqrt{2}$ donc : $A+1 \leq \sqrt{2}+1 \leq 3$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $2 \leq A+1 \leq 3$

Et on a : $a(A+1)(A-1)=1$ donc : $A-1=\frac{1}{a(A+1)}$

D'autre part on a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{A+1} \leq \frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{3a} \leq \frac{1}{a(A+1)} \leq \frac{1}{2a}$

Donc : $\frac{1}{3a} \leq A-1 \leq \frac{1}{2a}$ donc : $\frac{1}{3a}+1 \leq A \leq \frac{1}{2a}+1$

3) On a $1{,}2=1+0{,}2=1+\frac{1}{5}$ donc $A=\sqrt{1{,}2}=\sqrt{1+\frac{1}{5}}$

Donc : $a=5$

$\frac{1}{15}+1 \leq \sqrt{1{,}2} \leq \frac{1}{10}+1$ Ssi $\frac{16}{15} \leq \sqrt{1{,}2} \leq \frac{11}{10}$

Ssi $\frac{32}{30} \leq \sqrt{1{,}2} \leq \frac{33}{30}$ et on a $\frac{33}{30}-\frac{32}{30}=\frac{1}{30}$ $\left(\frac{33}{30}=1{,}1\right)$

$1{,}1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1{,}2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Exercice11 : soient x et y deux réels tels que : $x<y<3$

1) Montrer que : $x+y-6 \prec 0$

2) Comparer $a=x^2-6x+1$ et $b=y^2-6y+1$

Solution :1) on a $x<y<3$ donc $x<3$ et $y<3$

Donc **:** $x+y<6$ donc : $x+y-6<0$

2) $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

On a : $x<y$ donc $x-y \in \mathbb{R}^-$

Et on a : $x+y-6 \in \mathbb{R}^-$

Donc : $(x-y)(x+y-6) \in \mathbb{R}^+$

Donc : $a-b \in \mathbb{R}^+$ et par suite $a \geq b$

Exercice12: soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$

1)Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2)En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Réponse : 1) On a $x+2 \geq x$ car $(x+2)-x \geq 0$

Donc $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve :

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

Exercice13 : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D_1): 6x+3y+2=0$ et $(D_2): 3x-2y-1=0$

1) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes et Déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) Etudier la position relative des droites (AB) et (D_1)

4) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ)

Qui passe par le point $C(5,3)$ et parallèle a (D_2)

Solution :1) $6\times(-2)-3\times3=-12-9=-21\neq0$

Donc : (D_1) et (D_2) se coupent et Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases}6x+3y+2=0\\3x-2y-1=0\end{cases}$

On va résoudre le système $(1)\begin{cases}6x+3y=-2\\3x-2y=1\end{cases}$

On utilise la méthode des déterminants par exemple pour résoudre ce système : $\Delta=\begin{vmatrix}6&3\\3&-2\end{vmatrix}=-21\neq0$

Donc : $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-2&3\\1&-2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{1}{21}$ **et** $y=\dfrac{\begin{vmatrix}6&-2\\3&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{12}{-21}=-\dfrac{4}{7}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(-\dfrac{1}{21};-\dfrac{4}{7}\right)$

2)la droite (AB) a une équation de la forme :
(AB) : $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}(2,-4)$ $\overrightarrow{AB}(-b,a)$

Donc : $a=-4$ et $-b=2$ donc $b=-2$
L'équation devient : $-4x-2y+c=0$

On a : $A\in(AB)$ donc : $-4-4+c=0$ cad $c=8$

Donc : (AB) $-4x-2y+8=0$

Donc : $-2(2x+y-4)=0$

Donc (AB): $2x+y-4=0$

3) $(D_1):6x+3y+2=0$ et (AB): $2x+y-4=0$

On a : $(6)\times(1)-3\times2=6-6=0$

Donc : (D_1) et (AB) sont parallèles

4) (Δ) est parallèles (D_2) donc le vecteur directeur de (D_2) Est un vecteur directeur de (Δ)

Donc : $\vec{u}(2,3)$ est un vecteur (Δ) qui passe par $C(5,3)$

Donc : : $(\Delta)\begin{cases}x=5+2t\\y=3+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

<u>Exercice14:</u>

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et

Soient les points $A(1,2)$; $B(3,-2)$

Et les droites : $(D):3x-5y+6=0$ et $(D'):x-y=0$

1) Donner une représentation paramétrique des Droites (D) Et (D')

2) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) Qui passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC) avec $E(3;3)$ et $C(4;0)$

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) et les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D')

4) Montrer que J est le milieu de $[IB]$

Solution :1) a)Un vecteur directeur de $(D):3x-5y+6=0$

Est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}(5,3)$

Déterminons un point de (D) ?

Si $x=0$ alors : $(D):3\times0-5y+6=0$ donc $y=\dfrac{6}{5}$

Donc : une représentation paramétrique des Droites (D) est $(D)\begin{cases}x=0+5t\\y=\dfrac{6}{5}+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

b) un vecteur directeur de $(D'):x-y=0$

Est $\vec{u}(-b;a)$ donc : $\vec{u}'(1,1)$

Déterminons un point de (D') ?

Si $x=0$ alors : $(D'):0-y=0$ donc $y=0$

Donc : une représentation paramétrique des Droites (D') est $(D')\begin{cases}x=0+1k\\y=0+1k\end{cases}(k\in\mathbb{R})$

2) (Δ) passe par le point $B(1;0)$ et parallèle a (EC)

Donc : $\overrightarrow{EC}$ un vecteur directeur de (Δ) : $\overrightarrow{EC}(1;-3)$

Et on sait que : $\vec{u}(-b;a)$ donc : Donc : $a=-1$ et $b=-3$
Donc : $-3x-y+c=0$

Et on sait que (Δ) passe par $B(1;0)$ on trouve $c=3$

Donc : (Δ) $-3x-y+3=0$

3)a) Déterminons les coordonnées du point d'intersection I de (Δ) et (D) ?

On va résoudre le système $(1)\begin{cases}3x-5y=-6\\-3x-y=-3\end{cases}$

On fait la somme des deux équations membre a membre on trouve : $-6y=-9\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{2}$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :
$-3x-\dfrac{3}{2}+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Donc le point d'intersection I de (Δ) et (D) est $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b) Déterminons les coordonnées du point d'intersection J de (Δ) et (D') ?

On va résoudre le système $(1)\begin{cases} x-y=0 \\ -3x-y=-3 \end{cases}$

$x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Et en remplaçant dans la 2iem équation on trouve :

$-3x-x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Donc le point d'intersection J de (Δ) et (D') est $J\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

4) Montrons que J est le milieu de $[IB]$

Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$?

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{JB}\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JB}$

Donc : J est le milieu de $[IB]$

<u>Exercice15:</u> Soient A ; B ; C trois points du plan et E et F deux points tel que :

$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

1) Montrer que les points C ; E ; F sont alignés

2) Déterminer les coordonnées des points : A ; B ; C ; E ; F dans le repère $(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

3) Montrer par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés

Solution :1) On a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ (1)

D'autre part on a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $\overrightarrow{CE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$

Donc : les points C ; E ; F sont alignés

2) On considérant le repère : $(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ on a $C(0;0)$

On a $\overrightarrow{CA}=1\overrightarrow{CA}+0\overrightarrow{CB}$ donc $A(1;0)$

On a $\overrightarrow{CB}=01\overrightarrow{CA}+1\overrightarrow{CB}$ donc $B(0;1)$

On a : $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ par suite : $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

$\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

Donc : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ par suite : $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

3) Montrons par une autre méthode que les points C ; E ; F sont alignés ?

Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires

$$\det\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}\right)=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{4} \end{vmatrix}=-\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=0$$

Donc: $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires par suite les points C ; E ; F sont alignés

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien