1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF

Exercices de mathématiques sur les suites arithmétiques avec Correction

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice1 : Compléter les suites de nombres suivantes :

1) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; … ; … ; … ;15
2) -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; … …. ;… ;….
3) 10 ; 5 ; 0 ;.;….. ;… ;

Solution :1) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ;11 ;13 ;15

2) -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 3) 10 ; 5 ; 0 ; -5 ; -10 ; -15 ; -20 ; -25

Exercice2 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_n = 2n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : les quatre 1ere termes de la suite $(u_n)_n$
2) Calculer : $u_{n+1} - u_n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3) En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$

Solution :

1)$u_0 = 2\times 0+1=1 \quad u_1 = 2\times 1+1=3$

$u_2 = 2\times 2+1=5 \quad u_3 = 2\times 3+1=7$

2)$u_{n+1} - u_n = \left(2(n+1)+1\right) - (2n+1)$

$u_{n+1} - u_n = 2n+2+1-2n-1 = 2 = cons\tan te$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison $r=2$

Exercice3 : *Soient Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Et $v_n = n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme
2) Calculer v_0 et v_1 et v_3 et v_4
3) Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique ? justifier votre réponse

Solution :1) On a : $u_{n+1} = u_n - 3$ donc : $u_{n+1} - u_n = -3$

Donc : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r = −3 et de premier terme $u_0 = 2$

2)$v_0 = 2; v_1 = 3; v_2 = 6; v_3 = 11; v_4 = 17$

3) Ainsi : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

Exercice4 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_0 = 1$et sa raison $r=3$

1) Ecrire u_n en fonction de n
2) Calculer u_1 et u_2 et u_{2022} et u_{2023}

Solutions : 1) u_n en fonction de n ?

On a : $u_n = u_0 + nr$ D'où : $u_n = 1+3n$

2) $u_1 = u_0 + r = 1 + 3 = 4$

$u_2 = u_1 + r = 4 + 3 = 7$

$u_{2022} = 1 + 3 \times 2022 = 6067$

$u_{2023} = 1 + 3 \times 2023 = 6070$

Aussi on peut écrire que : $u_{2023} = u_{2022} + r = 6067 + 3 = 6070$

Exercice5 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_6 = 13$

1) Déterminer sa raison r

2) Déterminer son premier terme u_0 .

3) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n - p)r$

Pour n= 6 et p=1 on a : $u_6 = u_1 + (6 - 1)r$

Donc : $13 = 3 + 5r \Leftrightarrow 5r = 13 - 3$ Donc : $r = \frac{10}{5} = 2$

2) le terme u_0 ??

Pour n= 1 et p=0 on a :

$u_1 = u_0 + (1 - 0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + 2 \Leftrightarrow u_0 = 3 - 2 = 1$

Ou simplement on a : $u_1 = u_0 + r \Leftrightarrow 3 = u_0 + 2 \Leftrightarrow u_0 = 3 - 2 = 1$

3) u_n en fonction de n ?

On a : $\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n - p)r$

Méthode1 : Pour p=1 on a :

$u_n = u_1 + (n - 1) \times r \Leftrightarrow u_n = 3 + 2(n - 1)$

Donc : $u_n = 3 + 2n - 2$

Donc : $\boxed{u_n = 2n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Méthode1 : Pour p=0 on a :

$u_n = u_0 + (n - 0) \times r \Leftrightarrow \boxed{u_n = 1 + 2n}$

Exercice6 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_5 = 9$

1) Déterminer sa raison r

2) Déterminer son premier terme u_0 .

3) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

On a : $\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n - p)r$

Pour n= 5 et p=1 on a : $u_5 = u_1 + (5 - 1)r$

Donc : $9 = 3 + 4r \Leftrightarrow 4r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

2) le terme u_0 ??

$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

3) u_n en fonction de n ?

$$u_n = u_1 + \frac{3}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$$

$$u_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2) Ecrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = 1$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

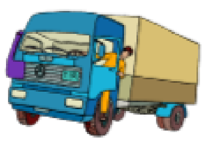
2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 + nr = 1 + n \times 1 = 1 + n$

Puisque : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$

Donc : $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{1 + (n+1)}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$



Exercice8 : Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991. L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.

Les nombres de camion forment une suite. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.
2) Donner la nature de cette suite et préciser le premier terme u_1 et la raison de cette suite.

3) Donner l'expression du nombre u_n de camions que possède l'entreprise l'année n.

4) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2023 ?

Solution :1) On peut dire que **:** $u_1 = 40$ c'est le nombre de camions que possède l'entreprise en 1991

Donc **:** le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992 est : $u_2 = u_1 + 8$

C'est-à-dire : $u_2 = 40 + 8 = 48\ camions$

Le nombre de camions que possède l'entreprise en 1993 est : $u_3 = u_2 + 8$

C'est-à-dire : $u_3 = 48+8 = 56\ camions$

Le nombre de camions que possède l'entreprise en 1994 est : $u_4 = u_3 + 8$

C'est-à-dire : $u_4 = 56+8 = 64\ camions$

2) a) la nature de cette suite : toujours on ajoute le même nombre : $r = 8$

$u_{n+1} = u_n + 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de $r = 8$ et de premier terme $u_1 = 40$

3) L'expression du nombre u_n de camions que possède l'entreprise l'année n. :

On a : $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de $r = 8$ et de premier terme $u_1 = 40$

Donc : on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : Pour p=1 on a : $u_n = u_1 + r(n-1) \Leftrightarrow u_n = 40 + 8(n-1)$

Donc : $u_n = 40 + 8n - 8$ Donc : $\boxed{u_n = 8n + 32}$

Remarque : $u_n = 8n + 32$ donc : $u_4 = 8\times 4 + 32 = 32 + 32 = 64$ (déjà trouvé)

4) le nombre de camions que possède l'entreprise en 2023 est :

1991 est : u_1 1992 est : u_2 1993 est : u_3 1999 est : u_9 2000 est : u_{10}

2001est : u_{11} 2021est : u_{31} 2022est : u_{32} 2023est : u_{33}

Donc : $u_{33} = 8\times 33 + 32 = 264 + 32 = \boxed{296}$ camions

Exercice9 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme : $u_0 = 5$ et sa raison $r = 3$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_8 et u_{13}

3) Calculer : $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{13}$ **et** $S_2 = u_8 + u_9 + \cdots + u_{13}$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 + nr$

Donc : $u_n = 5 + 3n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 5 + 3n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_8 = 5 + 3\times 8 = 5 + 24 = 29$ et $u_{13} = 5 + 3\times 13 = 5 + 39 = 44$

3) Calcul de : $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{13}$

$$S_1 = (le\ nombre\ de\ termes)\frac{le\ premier\ terme + le\ dernier\ terme}{2}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 13 - 0 + 1 = 14$

Donc : $S_1 = 14\dfrac{u_0 + u_{13}}{2} = 7(5+44) = 7\times 49 = 343$

Calcul de : $S_2 = u_8 + u_9 + \cdots + u_{13}$

$$S_2 = (le\ nombre\ de\ termes)\frac{le\ premier\ terme + le\ dernier\ terme}{2}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 13 - 8 + 1 = 6$

Donc : $S_2 = 6\frac{u_8 + u_{13}}{2} = 3(29+44) = 3\times 73 = 219$

Exercice10 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme : $u_0 = 1$ et sa raison $r = \frac{1}{2}$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_3 et u_{30}

3) Calculer : $S = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p=0 On a : $u_n = u_0 + nr$

Donc : $u_n = 1 + \frac{1}{2}n = 1 + \frac{n}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 1 + \frac{n}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ et $u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = 1 + 15 = 16$

3) Calcul de : $S = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

$$S = (le\ nombre\ de\ termes)\frac{le\ premier\ terme + le\ dernier\ terme}{2}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 30 - 3 + 1 = 28$

Donc : $S = 28\frac{u_3 + u_{30}}{2} = 14\left(\frac{5}{2} + 16\right) = 14\left(\frac{5}{2} + \frac{32}{2}\right) = 14\times\frac{37}{2} = 7\times 37 = 259$

Exercice11 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme : $u_1 = 2$ et sa raison $r = -2$

1) Ecrire u_n en fonction de n

2) Calculer u_7 et u_{25}

3) Calculer : $S = u_7 + u_4 + u_5 + \dots + u_{25}$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite arithmétique

Alors on a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p=1 On a : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Donc : $u_n = 2 - 2(n-1) = 2 - 2n + 2 = 4 - 2n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) On a : $u_n = 4 - 2n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_7 = 4 - 2\times 7 = 4 - 14 = -10$ et $u_{25} = 4 - 2\times 25 = 4 - 50 = -46$

3) Calcul de : $S = u_7 + u_4 + u_5 + \dots + u_{25}$

$$S = (le\ nombre\ de\ termes)\frac{le\ premier\ terme + le\ dernier\ terme}{2}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 25 - 7 + 1 = 19$

Donc : $S = 19\frac{u_7 + u_{25}}{2} = 19\frac{-10 + (-46)}{2} = 19\frac{-56}{2} = 19\times(-28) = -532$

Exercice12 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_0 = 5$ et $u_{100} = -195$

1) Calculer la raison r de cette suite

2) Ecrire u_n en fonction de n

3)Calculer u_1 et u_6

4) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_6$

5)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$v_n = 5u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer v_1 et v_2

Solution :1) la raison r ??

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 100 et p=0 on a :$u_{100} = u_0 + (100-0)r$

Donc : $u_{100} = u_0 + 100r$

Donc : $-195 = 5 + 100r \Leftrightarrow 100r = -195 - 5 \Leftrightarrow 100r = -200 \Leftrightarrow r = \frac{-200}{100} = -2$

2) u_n en fonction de n ?

$u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow u_n = 5 + (-2)n$

Donc : $u_n = 5 - 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de : u_1 ??

On a : $u_n = 5 - 2n$ donc : $u_1 = 5 - 2\times 1 = 5 - 2 = 3$

Calcul de : u_6 ??

On a : $u_n = 5 - 2n$ donc : $u_6 = 5 - 2\times 6 = 5 - 12 = -7$

4) Calcul de la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_6$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 5$ et sa raison $r = -2$

$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_6 = (6-1+1)\frac{u_1 + u_6}{2}$

$S = 6\frac{3+(-7)}{2} = 6\frac{-4}{2} = 6\times(-2) = -12$

5)On a : $v_n = 5u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_1 = 5u_1 + 1 = 5\times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$

On a : $v_2 = 5u_2 + 1$

Calculons d'abord : u_2 ??

On a : $u_n = 5 - 2n$ donc : $u_2 = 5 - 2\times 2 = 5 - 4 = 1$

Par suite : $v_2 = 5\times 1 + 1 = 5 + 1 = 6$

Exercice13 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $r = 3$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer : u_7

4) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

5) Déterminer n si on a : $u_n = 6065$

6)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :$v_n = 3u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer v_1 et v_2

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $r = 3$

a) $u_1 = u_0 + r = 2 + 3 = 5$

b) $u_2 = u_1 + r = 5 + 3 = 8$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $r = 3$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$

3) $u_n = 2 + 3n$ donc : $u_7 = 2 + 3\times 7 = 2 + 21 = 23$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = (7 - 1 + 1)\frac{u_1 + u_7}{2}$$

$$S = 7\frac{5+23}{2} = 7\frac{28}{2} = 7\times 14 = 98$$

5) On a : $u_n = 6047$ donc : $2 + 3n = 6065$

Donc : $3n = 6065 - 2$

Donc : $n = \frac{6063}{3} = 2021$

6)On a :$v_n = 3u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_1 = 3u_1 - 1 = 3\times 5 - 1 = 15 - 1 = 14$

$v_2 = 3u_2 - 1 = 3\times 8 - 1 = 24 - 1 = 23$

Exercice14 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 1$ et sa raison $r = 5$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer : v_2

4) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_9$

5) Déterminer n si on a : $u_n = 10116$

6)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$v_n = 4u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer v_1 et v_2

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 1$ et sa raison $r = 5$

a) $u_1 = u_0 + r = 1 + 5 = 6$

b) $u_2 = u_1 + r = 6 + 5 = 11$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $r = 5$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 1 + 5n$

3) $u_n = 1+5n$ donc : $u_9 = 1+5\times 9 = 1+45 = 46$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = (9-1+1)\frac{u_1+u_9}{2}$$

$$S = 9\frac{6+46}{2} = 9\frac{52}{2} = 9\times 26 = 234$$

5) On a : $u_n = 10116$ donc : $1+5n = 10116$

Donc : $5n = 10116-1$

Donc : $n = \frac{10115}{5} = 2023$

6)On a : $v_n = 4u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_1 = 4u_1 - 3 = 4\times 6 - 3 = 24 - 3 = 21$

$v_2 = 4u_2 - 3 = 4\times 11 - 3 = 44 - 3 = 41$

Exercice15 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 2$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer : u_7

4) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

5) Déterminer n si on a : $u_n = 4047$

6)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$v_n = 2u_n - 3$

Calculer v_1 et v_2

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 2$

a) $u_1 = u_0 + r = 3+2 = 5$

b) $u_2 = u_1 + r = 5+2 = 7$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 2$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 3+2n$

3) $u_n = 3+2n$ donc : $u_7 = 3+2\times 7 = 3+14 = 17$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = (7-1+1)\frac{5+17}{2}$$

$$S = 7\frac{5+17}{2} = 7\frac{22}{2} = 7\times 11 = 77$$

5) On a : $u_n = 4047$ donc : $3+2n = 4047$

Donc : $2n = 4047-3$

Donc : $n = \frac{4044}{2} = 2022$

6)On a : $v_n = 2u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_1 = 2u_1 - 3 = 2\times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

$v_2 = 2u_2 - 3 = 2\times 7 - 3 = 14 - 3 = 11$