1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF

Exercices de mathématiques sur les suites géométriques avec Correction extrais des examens régionaux et des interrogations

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice1 : Région Rabat 2017

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme : $u_0 = 3$ et sa raison $q = 2$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$ On donne : $2^{10} = 59049$

Solution :1) Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$

$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$

2) On a : $u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $u_n = 3 \times 2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 9 - 0 + 1 = 10$

Donc : $S = u_0 \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3\frac{1-59049}{-1} = 3 \times \frac{-59048}{-1} = 3 \times 59048 = 295240$

Exercice2 : Région Tanger Tétouan Al Hoceima (la région du Nord) 2018

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_0 = 2$ et $u_1 = 4$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$

2) Ecrire u_n en fonction de n et Vérifier que : $u_9 = 1024$

3) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(u_n)_n$

Donc : $u_1 = qu_0$

Donc : $4 = q \times 2$

Donc : $q = \frac{4}{2} = 2$

2) u_n en fonction de n ?

Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $u_n = 2\times 2^n = 2^1\times 2^n = 2^{n+1}$

Donc : $\boxed{u_n = 2^{n+1}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Alors : $u_9 = 2^{9+1} = 2^{10} = 1024$

3) Calcul de : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 9-0+1 = 9+1 = 10$

$$S = u_0\frac{1-2^{10}}{1-2} = 2\frac{1-1024}{-1} = (-2)\times(-1023) = 2046$$

Exercice3 : Région Tanger Tétouan Al Hoceima (la région du Nord) 2018 istidr

Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique et vérifier que sa raison est : $q = \frac{1}{3}$

3) Montrer que : $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

4) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} = q$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 1$et sa raison $q = \frac{1}{3}$

2) a) On a : $u_1 = q\times u_0$ donc $u_1 = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$

b) On a : $u_2 = q\times u_1$ donc $u_2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 1$et sa raison $q = \frac{1}{3}$

On a donc : $u_n = u_0\times q^n$ donc : $u_n = 1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Calcul en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ **:**

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 1$et sa raison $q = \frac{1}{3}$

Alors : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = u_0\frac{1-q^{9-0+1}}{1-q}$

On a donc : $S = 1\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1-\dfrac{1^{10}}{3^{10}}}{\dfrac{3}{3}-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{59049}}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{59049}\right)$

Donc : $S = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{59049}{59049}-\dfrac{1}{59049}\right) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{59048}{59049}\right) = \dfrac{3\times 59048}{2\times 59049} = \dfrac{177144}{118098} \simeq 1,49997$

Exercice4 : Région Rabat 2020

Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique de raison q tel que $v_0 = 3$ et $v_3 = 24$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$

2) Calculer : v_1 et v_2

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) Montrer que : $v_0 + v_1 + \cdots + v_5 = 189$

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(v_n)_n$

Donc : $v_3 = q^3 v_0$

Donc : $24 = q^3 \times 3$

Donc : $q^3 = \dfrac{24}{3} = 8$

Donc : $q = 2$

2) On a : $v_1 = q v_0$

Donc : $v_1 = 2\times 3 = 6$

On a : $v_2 = q v_1$

Donc : $v_2 = 2\times 6 = 12$

3) v_n en fonction de n ?

Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $v_n = v_0 \times q^n$

Donc : $v_n = 3\times 2^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

4) $v_0 + v_1 + \cdots + v_5 = \left(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme\right)\dfrac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$

$le\ nombre\ de\ termes = 5-0+1 = 6$

$S = v_0\dfrac{1-2^6}{1-2} = 3\dfrac{1-64}{-1} = -3\times(-63) = 189$

Exercice5 : Région golmim 2018

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_0 = 81$ et $u_1 = 27$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = \dfrac{1}{3}$

2) Calculer u_2

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(u_n)_n$

Donc : $u_1 = qu_0$

Donc : $27 = q \times 81$

Donc : $q = \frac{27}{81} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

2) On a : $u_2 = qu_1$

Donc : $u_2 = \frac{1}{3} \times 27 = \frac{27}{3} = 9$

3) u_n en fonction de n ?

Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) Calcul de : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = n - 0 + 1 = n + 1$

$$S = u_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = 81 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = 81 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{243}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Exercice6 : Région de Fès Meknès (Taza Taounat)2018

1) Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_7 = 6$ et $u_8 = 12$

Déterminer la raison q de cette suite

2)Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = 3n - 5$: $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer : v_0 et v_{39}

b) Montrer que de la suite $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$

c) Calculer la somme suivante : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{39}$

Solution : 1) la raison q ??

On a : $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Donc : $u_8 = qu_7$

Donc : $12 = q \times 6$

Donc : $q = \frac{12}{6} = 2$

2) a) On a : $v_n = 3n - 5$: $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_0 = 3 \times 0 - 5 = 0 - 5 = -5$ et $v_{39} = 3 \times 39 - 5 = 117 - 5 = 112$

b) $v_{n+1}-v_n=(3(n+1)-5)-(3n-5)=3n+3-5-3n+5=3=r$

Donc : $v_{n+1}-v_n=3=r \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $(v_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $v_0=-5$ et sa raison $r=3$

c) $(v_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S=v_0+v_1+\cdots+v_{39}=(39-0+1)\dfrac{v_0+v_{39}}{2}$

$$S=40\frac{-5+112}{2}=20\frac{107}{2}=10\times107=1070$$

Exercice7 : Région Beni Mellal 2016

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_1=5$ et $u_2=10$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q=2$

2) Calculer u_3

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer u_{15} sachant que : $2^{14}=16384$

5) Calculer : $S=u_1+u_2+\cdots+u_n$ en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(u_n)_n$

Donc : $u_2=qu_1$

Donc : $10=q\times5$ Donc : $q=\dfrac{10}{5}=2$

2) On a : $u_3=qu_2$

Donc : $u_3=2\times10=20$

3) u_n en fonction de n ?

Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n=u_1\times q^{n-1}$

Donc : $u_n=5\times2^{n-1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

4) On a : $u_n=5\times2^{n-1}$ donc : $u_{15}=5\times2^{15-1}=5\times2^{14}=5\times16384=81920$

5) Calcul de : $S=u_1+u_2+\cdots+u_n$ en fonction de n

$$S=(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes=n-1+1=n$

$$S=u_1\frac{1-2^n}{1-2}=5\frac{1-2^n}{-1}=-5(1-2^n)=-5+5\times2^n$$

Exercice8 : Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune) 2015 istid

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que : sa raison $q=2$ et $u_5=96$

1) Vérifier que : $u_0=3$

2) Calculer : u_7

3) Calculer : $S=u_0+u_3+\cdots+u_7$

Solution : 1) On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique :

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = q^n u_0$

Donc : $u_5 = q^5 u_0$

Donc : $96 = 2^5 u_0$

Donc : $96 = 32 \times u_0$

Donc : $u_0 = \frac{96}{32} = 3$

2) Calcul de : u_7

$u_7 = q^7 u_0 = 2^7 \times 3 = 128 \times 3 = 384$

3) Calcul de : $S = u_0 + u_3 + \cdots + u_7$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 7 - 0 + 1 = 8$

Donc : $S = u_0 \frac{1-2^8}{1-2} = 3\frac{1-256}{-1} = (-3)\times(-255) = 765$

Exercice9 : Région de Fès Meknès (Taza Taounat)2015 istid

1)Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_0 = 3$ et $u_3 = 24$

a) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$

b) Calculer : $S = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

2)Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer : v_0 et v_1

b) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison

c) Montrer que 2015 est un terme de la suite $(v_n)_n$

Solution : 1) a) la raison q ??

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique :

Donc : $u_3 = q^3 u_0$

Donc : $24 = q^3 \times 3$

Donc : $q^3 = \frac{24}{3} = 8$

Donc : $q = 2$

b) Calcul de : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 5 - 0 + 1 = 6$

Donc : $S_5 = u_0 \frac{1-2^6}{1-2} = 3\frac{1-64}{-1} = (-3)\times(-63) = 189$

2) a) $v_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_0 = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{3}{2} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ et $v_1 = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

b) $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Donc : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} = r \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(v_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$ et sa raison $r = \frac{1}{2}$

c) $v_n = 2015$ signifie $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = 2015$

Signifie $\frac{n+3}{2} = 2015$

Signifie $n + 3 = 2015 \times 2$

Signifie $n + 3 = 4030$

Signifie $n = 4030 - 3 = 4027$

Donc : $u_{4027} = 2015$

Exercice10 : interrogation 2021

Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ et vérifier que sa raison est : $\frac{1}{2}$

2) Calculer u_1 et u_2

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Déterminer n si on a : $u_n = \frac{1}{16}$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $q = \frac{1}{2}$

2) On a : $u_1 = q \times u_0$ donc $u_1 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$u_2 = q \times u_1$ donc $u_2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

3) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $q = \frac{1}{2}$

On a donc : $u_n = u_0 \times q^n$ donc : $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) $u_n = \frac{1}{16}$ signifie que : $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16}$ signifie que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{32}$

Signifie que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ Signifie que : $n = 5$

Exercice11 : interrogation 2020

Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = 5\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer v_0 et v_1 et v_2

2) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

3) Calculer la somme suivante : $S = v_0 + v_2 + \cdots + v_5$

Solution :1) On a : $v_n = 5\times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 : on a :$v_0 = 5\times 2^0$ par suite : $v_0 = 5$ car $2^0 = 1$

Pour n=1 : on a :$v_1 = 5\times 2^1$ par suite : $v_1 = 10$

Pour n=2 : on a :$v_2 = 5\times 2^2$ par suite : $v_2 = 20$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5\times 2^{n+1}}{5\times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2 = q$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et son premier terme : $v_0 = 5$

3) puisque la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et son premier terme : $v_0 = 5$

Alors : $S = v_0 \frac{1-q^{5-0+1}}{1-q} = 5\frac{1-2^6}{1-2} = 5\frac{1-2^6}{-1} = -5\left(1-2^6\right) = -5(1-64) = -5\times(-63) = 315$

Exercice12 : interrogation 2019

Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 7u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ et vérifier que sa raison est : 7

2) Calculer u_2 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = 7u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 7 = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 7$

2) a) On a : $u_1 = q\times u_0$ donc $u_1 = 7\times 3 = 21$

b) On a : $u_2 = q\times u_1$ donc $u_2 = 7\times 21 = 147$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 7$

On a donc : $u_n = u_0\times q^n$ donc : $u_n = 3\times 7^n$

3) Calcul en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $q = 7$

Alors : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$

On a donc : $S = 3\dfrac{1-7^{n+1}}{1-7} = 3\dfrac{1-7^{n+1}}{-6} = -\dfrac{1}{2}\left(1-7^{n+1}\right)$

Exercice13 : (2020) Région de Fès Meknès (Taza Taounat)

Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 5u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ et vérifier que sa raison est : 5

2) Calculer u_1 et u_2

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

4)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :$v_n = \dfrac{1}{5}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer v_0 et v_1

b) Calculer en fonction de n la somme suivante : $T = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = 5u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 5 = q \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 4$ et sa raison $q = 5$

2) a) On a : $u_1 = q \times u_0$ donc $u_1 = 5 \times 4 = 20$

b) On a : $u_2 = q \times u_1$ donc $u_2 = 5 \times 20 = 100$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 4$ et sa raison $q = 5$

On a donc : $u_n = u_0 \times q^n$ donc : $u_n = 4 \times 5^n$

3) Calcul en fonction de n la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_0 = 4$ et sa raison $q = 5$

Alors : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$

On a donc : $S = 4\dfrac{1-5^{n+1}}{1-5} = 4\dfrac{1-5^{n+1}}{-4} = -1\left(1-5^{n+1}\right) = -1 + 5^{n+1}$

4)Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$v_n = \dfrac{1}{5}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calcul de v_0 et v_1 :

$v_0 = \dfrac{1}{5}u_0 = \dfrac{1}{5} \times 4 = \dfrac{4}{5}$ et $v_1 = \dfrac{1}{5}u_1 = \dfrac{1}{5} \times 20 = \dfrac{20}{5} = 4$

c) Calcul en fonction de n la somme suivante : $T = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$$T = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \frac{1}{5}u_0 + \frac{1}{5}u_1 + \frac{1}{5}u_2 + \cdots + \frac{1}{5}u_n = \frac{1}{5}\left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$$

$$T = \frac{1}{5}\times S = \frac{1}{5}\times\left(-1+5^{n+1}\right) = -\frac{1}{5} + 5^{n+1}\times\frac{1}{5} = -\frac{1}{5} + 5^n$$

Exercice14: Région de Fès Meknès (Taza Taounat)2013

Soit $\left(u_n\right)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_{10} = 35$ et $u_6 = 23$

Et soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :$v_n = 2^{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Vérifier que la raison r de cette suite est 3 et que : $u_0 = 5$

2) Calculer la somme suivante : $S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013}$

3) Montrer que $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$

Solution :1) la raison r ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 10 et p=6 on a :$u_{10} = u_6 + (10-6)r$

Donc : $u_{10} = u_6 + 4r$

Donc : $35 = 23 + 4r \Leftrightarrow 4r = 35 - 23 \Leftrightarrow 4r = 12 \Leftrightarrow r = \frac{12}{4} = 3$

On a : $u_n = u_0 + nr$ donc : $u_6 = u_0 + 6r$

Donc : $23 = u_0 + 6\times 3$

Donc : $23 - 18 = u_0$

Donc : $u_0 = 5$

2) Calcul de la somme suivante : $S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013}$

$\left(u_n\right)_n$ Une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 5$ et sa raison $r = 3$

$$S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013} = (2013 - 1996 + 1)\frac{u_{1996} + u_{2013}}{2} = 18\frac{u_{1996} + u_{2013}}{2}$$

On a : $u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$

Donc : $u_{1996} = 5 + 1996\times 3 = 5 + 5988 = 5993$

Et $u_{2013} = 5 + 2013\times 3 = 5 + 6039 = 6044$

$$S = 18\frac{5993 + 6044}{2} = 18\frac{12037}{2} = 9\times 12037 = 228703$$

3)On a : $v_n = 2^{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{u_{n+1}}}{2^{u_n}} = 2^{u_{n+1} - u_n} = 2^3 = 8 = q$

Par suite :$\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$

Exercice15 : (2008) Région de l'oriental (Oujda Nador Jerada Laâyoune)

Le contrat de location insiste sur une augmentation annuelle du loyer de 20 %.

Soit u_1 le prix de location pour la première année : $u_1 = 3125$ dirhams

Soit u_2 le prix de location pour la deuxième année

Soit u_n le prix de location pour l'année de rang n

1) Calculer : u_2

2) a) Montrer que : $u_{n+1}=\frac{6}{5}u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est géométrique et déterminer sa raison

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer la somme des prix de location pour les 6 premières années

Remarque : $6^6=46656$ *et* $5^6=15625$

Solution :1) Calcul de u_2 :

u_2 C'est Le prix à payer après l'augmentation annuelle du loyer de 20 %. **:**

$$u_2=3125+3125\times\frac{20}{100}=3125+3125\times\frac{1}{5}=3125+625=3750dh$$

2) on a : $u_{n+1}=u_n+u_n\times\frac{20}{100}=u_n\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{5}\times u_n$

Donc : la suite $(u_n)_n$ est géométrique et sa raison est : $q=\frac{6}{5}$

3) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme $u_1=3125$ et sa raison $q=\frac{6}{5}$

On a donc : $u_n=u_1\times q^{n-1}$ donc : $u_n=3125\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

4) Calculer la somme des prix de location pour les 6 premières années

On va Calculer la somme suivante : $S=u_1+u_2+\cdots+u_6$ **:**

Puisque : $(u_n)_n$ une suite géométrique son premier terme $u_1=3125$et sa raison $q=\frac{6}{5}$

Alors : $S=u_1+u_2+\cdots+u_6=u_1\frac{1-q^{6-1+1}}{1-q}$

On a donc : $S=3125\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^6}{1-\frac{6}{5}}=3125\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^6}{-\frac{1}{5}}=-5\times3125\left(1-\frac{46656}{15625}\right)=-15625\left(\frac{15625-46656}{15625}\right)$

$S=-(15625-46656)=31031DH$

Exercice16 :2015 Région de Fès Meknès (Taza Taounat)

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_0=100$ et $u_{10}=10$

1) a) Vérifier que la raison r de cette suite est : $r=2$

b) Calculer la somme suivante : $A=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

2) Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique tel que : $v_3=100$ et sa raison $q=10$

a) Montrer que : $v_0=0,1$

b) Montrer que : $S=v_0+v_1+\cdots+v_4$ est égale a **: 1111,1**

Solution :1) a) la raison r ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 10 et p=0 on a : $u_{10} = u_0 + (10-0)r$

Donc : $u_{10} = u_0 + 10r$

Donc : $10 = 100 + 10r \Leftrightarrow 10r = 10 - 100 \Leftrightarrow 10r = -90 \Leftrightarrow r = -\dfrac{90}{10} = -9$

b) Calcul de la somme suivante : $A = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$$A = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10-0+1)\frac{u_0 + u_{10}}{2}$$

$$A = 11\frac{100+10}{2} = 11\frac{110}{2} = 11\times 55 = 605$$

2)Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $v_n = v_p \times q^{n-p} \quad \forall(n;p)\in\mathbb{N}^2$

Pour p=0 et n=3 On a : $v_3 = v_0 \times q^{3-0}$

Donc : $100 = v_0 \times 10^3$

Donc : $v_0 = \dfrac{100}{1000} = 0,1$

b) Calcul de : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_4$

$$S = (\text{le premier terme dans la somme})\frac{1-\text{raison}^{(\text{le nombre de termes})}}{1-\text{raison}}$$

$\text{le nombre de termes} = 4 - 0 + 1 = 5$

Donc : $S = v_0\dfrac{1-10^5}{1-10} = 0,1\dfrac{1-100000}{-9} = 0,1\times\dfrac{-99999}{-9} = 0,1\times 11111 = 1111,1$

Exercice17 : Région Fès 2014

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = -3$ et $u_{10} = -20$

1) Vérifier que : $u_0 = 10$

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

4) Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = \dfrac{2}{3^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(v_n)_n$ une suite géométrique et déterminer sa raison

Solution :1) On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 10 et p=0 on a : $u_{10} = u_0 + (10-0)r$

Donc : $-20 = u_0 + 10\times(-3)$

Donc : $-20 = u_0 - 30$

Donc : $-20 + 30 = u_0$

Donc : $10 = u_0$

2) u_n en fonction de n ?

$u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow u_n = 10 - 3n$

Donc : $u_n = 10 - 3n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_{10}}{2}$$

$$S = 11\frac{10 + (-20)}{2} = 11\frac{-10}{2} = 11 \times (-5) = -55$$

4) Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = \frac{2}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^n \times 3^1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} = q$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

Exercice18 :2012 **Région de Fès Meknès (Taza Taounat)**

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5 = -7$ et $u_8 = 2$

et Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = 25 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Vérifier que la raison de la suite $(u_n)_n$ est : $r = 3$

b) Calculer : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$

b) Calculer la somme suivante : $S_2 = v_0 + v_2 + \cdots + v_6$

Solution :1) a) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5 = -7$ et $u_8 = 2$

Donc : $u_n = u_p + (n - p)r$

On pose : n=8 et p=5

Donc : $u_8 = u_5 + (8 - 5)r$

Donc : $2 = -7 + 3r$

Donc : $2 + 7 = 3r$

Donc : $9 = 3r$

Donc : $r = \frac{9}{3} = 3$

b) Calcul de la somme suivante : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6 = (6 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_6}{2}$$

On a : $u_n = u_p + (n - p)r$

Donc : $u_8 = u_0 + (8-0)\times 3$

Donc : $2 = u_0 + 24$

Donc : $2 - 24 = u_0$

Donc : $-22 = u_0$

Et on a : $u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : $u_6 = u_0 + (6-0)3$

Donc : $u_6 = -22 + 18 = -4$

Donc : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6 = 7\dfrac{-22+(-4)}{2} = 7\dfrac{-26}{2} = 7\times(-13) = -91$

2) a) On a : $v_n = 25\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{n}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1-n} = \left(\frac{5}{3}\right)^{1} = \frac{5}{3} = q$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \dfrac{5}{3}$

3) Puisque la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \dfrac{5}{3}$

Alors : $S_2 = v_0 + v_2 + \cdots + v_6 = v_0\dfrac{1-q^{6-0+1}}{1-q}$

On a : $v_n = 25\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

Pour n=0 : on a :$v_0 = 25\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^0$ par suite : $v_0 = 25\times 1 = 25$ car $\left(\dfrac{5}{3}\right)^0 = 1$

$$S_2 = 25\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^7}{1-\frac{5}{3}} = 25\times\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^7}{-\frac{2}{3}} = -25\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^7\right) = -\frac{75}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^7\right)$$

Exercice19 : Région Rabat 2021

1)Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_n = -2n+3 \ \forall n\in\mathbb{N}$

a) Calculer : u_0 et u_1

b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est Arithmétique de raison : $r = -2$

c) Montrer que : -95 est un terme de la suite $(u_n)_n$

d) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{49}$

2) Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique telle que sa raison q est négative et $v_2 = 36$ et $v_4 = 324$

a) Vérifier que sa raison $q = -3$

b) calculer v_0 et écrire v_n en fonction de n

Solution : 1) a) $u_n = -2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_0 = -2\times 0 + 3 = 3$

$u_1 = -2\times 1 + 3 = -2+3 = 1$

b) $u_{n+1} - u_n = (-2(n+1)+3) - (-2n+3) = -2n-2+3+2n-3 = -2 = r$

Donc : $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison : $r = -2$

c) $u_n = -95 \Leftrightarrow -2n+3 = -95 \Leftrightarrow -2n = -95-3$

$$-2n = -98 \Leftrightarrow n = \frac{-98}{-2} \Leftrightarrow n = 49$$

Donc : -95 est un terme de la suite $(u_n)_n$ et on a : $u_{49} = -95$

d) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{49} = (49-1+1)\dfrac{u_1+u_{49}}{2}$

$$S = 49\frac{1+(-95)}{2} = 49\frac{-94}{2} = 49\times(-47) = -2303$$

2) a) la raison q ??

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad v_n = q^{n-p} v_p$

Pour n= 4 et p=2 on a : $v_4 = q^{4-2} v_2$

Donc : $324 = q^2 36 \Leftrightarrow q^2 = \dfrac{324}{36} \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \sqrt{9} \ ou\ q = -\sqrt{9} \Leftrightarrow q = 3 \ ou\ q = -3$

Puisque : la raison q est négative

Donc : $q = -3$

b) Calcul de v_0

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad v_n = q^{n-p} v_p$

Pour n= 2 et p=0 on a : $v_2 = q^{2-0} v_0$

Donc : $36 = (-3)^2 v_0$

Donc : $36 = 9v_0$ c'est-à-dire : $v_0 = \dfrac{36}{9} = 4$

v_n en fonction de n ?

$v_n = v_0(-3)^{n-0} \Leftrightarrow v_n = 4(-3)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$