Exercices avec corrections sur L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Types d'exercices :
Application directe du cours (*)
Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) I) Comparer les réels suivants :

1) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$ 2) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 3) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

II) Soient a et b deux réels tel que : $a \le b$
Comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

III) Soient a et b deux réels strictement positifs tel que $a \le b$ Comparer :

1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ 3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

IV) Soient a et b deux réels négatifs tel que : $a \le b$;
Comparer : a^2 et b^2

Corrigé :I) Comparer a et b revient à étudier le signe de : $a-b$.

1) On compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$:

$$\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$$

Donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\ge-\frac{15}{4}$

2) On compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$:

$$\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0$$

Donc : $\frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$ ou $\frac{-12}{7}\le\frac{15}{4}$

3) On compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$:

On a : $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et $50-20=30>0$

Et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs alors: $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

II) Soient a et b deux réels tel que : $a \le b$

1) On compare $5a$ et $5b$: on a :
$5a-5b=5(a-b)$ Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$
Et on a : $5>0$ donc : $5a\le 5b$.

2) On compare $-13a$ et $-13b$:
On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$
Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$
Et on a aussi : $-13<0$ donc $-13a\ge -13b$

III) Soient a et b deux réels strictement positifs
Tel que : $a\le b$

1) On compare a^2 et b^2 :
On a : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ et on a : a et b deux réels strictement positifs donc $a+b\ge 0$
Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$
Alors : $(a-b)(a+b)\le 0$ D'où $a^2\le b^2$

2) On compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

On a : $a\le b$ alors $a-b\le 0$.
Et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 0$ car c'est la somme de deux nombres positifs
Donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\le 0$ d'où : $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$

3) On compare $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: on a : $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$
Et on a : $a\le b$ alors $b-a\ge 0$
Et puisque a et b deux réels strictement positifs alors $ab>0$ car c'est la produit de deux nombres positifs
Donc : $\frac{b-a}{ab}\ge 0$ d'où : $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$

IV) Soient a et b deux réels strictement négatifs tel que $a\le b$ On compare : a^2 et b^2 :
On a : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Et on a : a et b deux réels négatifs donc $a+b\le 0$
Et puisque $a\le b$ alors $a-b\le 0$ par suite :
$(a-b)(a+b)\ge 0$ D'où $a^2\ge b^2$.

Exercice2 : (**) Comparer a et b dans les cas suivants :1) $a=2+\sqrt{3}$ et $b=2\sqrt{3}$

2) $a=\sqrt{6}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$
3) $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$
4) $a=10\sqrt{51}$ et $b=70+\sqrt{2}$
5) $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$
6) $a=3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\frac{9}{2}}$ et $b=\sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$
7) $a=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ et $b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Corrigé :1) $a-b=2-\sqrt{3}$ nombre positif ce qui signifie que : $a-b\in\mathbb{R}^{*+}$ par suite : $a\succ b$

2) $a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

On compare : $\sqrt{2}$ et1 : on a $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$

Donc : $\sqrt{2}>1$ et par suite $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$

Par suite $\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ D'où $a>b$

3) On compare : $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$
On calcul la différence :

$a-b=\sqrt{10}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{5\times 2}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)$

$a-b=\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+1=\sqrt{5}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

On factorise par : $\sqrt{5}$ et par $\left(\sqrt{2}-1\right)$

Donc : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$

On a : $\sqrt{2}>1$ car $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$

Donc : $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Et on a: $\sqrt{5}>1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $1^2=1$ donc : $\left(\sqrt{5}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ et par suite : $a>b$

4) On compare : $a=10\sqrt{51}$ et $b=70+\sqrt{2}$
Puisque a et b sont positifs il suffit de comparer
a^2 et b^2 : on a $a^2=\left(10\sqrt{51}\right)^2=5100$

$b^2=\left(70+\sqrt{2}\right)^2=4900+140\sqrt{2}+2=4902+140\sqrt{2}$

$a^2-b^2=198-140\sqrt{2}=2\left(99-70\sqrt{2}\right)$

Et on a : $(99)^2=9801$ et $\left(70\sqrt{2}\right)^2=9800$

Donc : $99-70\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$
Equivaut à : $2\left(99-70\sqrt{2}\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Alors : $a^2-b^2>0$ donc $a>b$ ($a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$)

5) On compare : $a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$?

$$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$b-a=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{4+\sqrt{2}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b-a=\frac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14}=\frac{8-5\sqrt{2}}{14}$$

On a : $8>5\sqrt{2}$ car $(8)^2=64$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$

Donc : $8-5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc on a aussi : $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite : $b>a$

6) On compare : $a=3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\dfrac{9}{2}}$

et $b=\sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$

$$a-b=\left(3\sqrt{18}-\sqrt{72}+2\sqrt{\frac{9}{2}}\right)-\left(\sqrt{28}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}\right)$$

$$a-b=\left(9\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)-\left(2\sqrt{7}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)$$

$$a-b=9\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{7}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}-2\sqrt{7}$$

On a : $4\sqrt{2}>2\sqrt{7}$ car $\left(2\sqrt{7}\right)^2=28$ et $\left(4\sqrt{2}\right)^2=32$

Donc : $4\sqrt{2}-2\sqrt{7}\in\mathbb{R}^{+*}$ Et par suite : $a>b$

7) $a-b=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$$a-b=\frac{\left(2\sqrt{3}+2-\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\right)-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}$$

$$a-b=\frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}.$$

$$a-b=\frac{3\sqrt{3}-5}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

On a : $3\sqrt{3}>5$ car $\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$ et $(5)^2=25$

Donc : $3\sqrt{3}-5\in\mathbb{R}^{+*}$ et on a aussi : $\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite : $a>b$.

Exercice3 : (**) $a\in\mathbb{R}$
1) Comparer $2a$ et a^2+1
2) Comparer : $4a-1$ **et** $4a^2$

Corrigé :1) $\left(a^2+1\right)-2a=a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$
Car : le carré est toujours positif.
Donc : $a^2+1\geq 2a$ si $a\in\mathbb{R}$
2) On a $4a^2-(4a-1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\geq 0$

Donc : $4a^2\geq 4a-1$.

Exercice4 : (**) Soient a et b deux nombres réels tels que : $a^2+b^2=2$

1) Montrer que : $(a+b)^2=2(1+ab)$

2) En déduire que : si a et b sont positifs alors $a+b>\sqrt{2}$

Corrigé : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $a^2+b^2=2$

1) On a : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=(a^2+b^2)+2ab=2+2ab$

Donc : $(a+b)^2=2(1+ab)$

2) On a $a\in\mathbb{R}^+$ و $b\in\mathbb{R}^+$ équivaut à : $a\geq 0$ et $b\geq 0$

Donc : $a+b\geq 0$ et $ab\geq 0$ par suite : $1+ab>1$

Et puisque : $(a+b)^2=2(1+ab)$ alors $(a+b)^2>2$

Implique : $a+b>\sqrt{2}$ car $a+b\geq 0$

Exercice5 : (**) Soit $x\in\mathbb{R}^+$;

Comparer: $2\sqrt{x}-1$ et x

Corrigé : On a:

$x-(2\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\times 1+1^2=(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$

Donc: $x\geq(2\sqrt{x}-1)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Exercice6 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$

On pose : $a=\sqrt{4n^2+1}$ et $b=2n+1$

Comparer les nombres : a et b.

Corrigé : Pour comparer deux nombres positifs on compare leurs carrés :

On a: $a^2=\left(\sqrt{4n^2+1}\right)^2=4n^2+1$ et $b^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

$b^2-a^2=4n^2+4n+1-(4n^2+1)$

$b^2-a^2=4n^2+4n+1-4n^2-1=4n\geq 0$ Car $n\in\mathbb{N}$

Donc : $b^2\geq a^2$ et par suite $b\geq a$

Car $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$

Exercice7 : (**) Soient a ;b et c des réels strictement positifs tel que : $\frac{a}{b}\leq 1$.

Montrer que : $\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+c}$.

Corrigé : Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$ revient à étudier le signe de : $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}$.

$$\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+c)-a(b+c)}{b(b+c)}=\frac{ba+bc-ab-ac}{b(b+c)}$$

Donc : $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ac}{b(b+c)}=\frac{c(b-a)}{b(b+c)}$

Et puisque : b et c des réels strictement positifs

Alors : $b(b+c)\succ 0$ et on a aussi : $\frac{a}{b}\leq 1$

Donc: $b\times\frac{a}{b}\leq b\times 1$ c'est à dire: $a\leq b$

Par suite: $0\leq b-a$.

Donc: $\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}\geq 0$ et par conséquent: $\frac{a+c}{b+c}\geq\frac{a}{b}$.

Exercice8: (**) *Soit a* est un réel strictement positif.

1. Montrer que : Si $a>1$, alors $a^3>a^2>a$.
2. Montrer que : si $a<1$, alors $a^3<a^2<a$.

Corrigé : De l'hypothèse $a>1$, on déduit d'une part que $a^2>a$ (on multiplie les deux membres par $a>0$) et d'autre part que : $a^3>\boldsymbol{a^2}$ (on multiplie par $a^2>0$).

Donc : $a^2>a$ et $a^3>a^2$ et par suite : $a^3>a^2>a$.

De la même façon, lorsque : $0<a<1$ on démontre que : $a^3<a^2<a$.

Exercice9 : (**) Soit $x\in\mathbb{R}^{*+}$

1) Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de :

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Corrigé :1) On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$

Donc $\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve :

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

(Le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Exercice10 : (**) Soient $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$

Comparer : $x=\frac{7a+2b}{7a}$ et $y=\frac{8b}{7a+2b}$

Corrigé : On a : $x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

Donc : $x-y=\dfrac{(7a+2b)^2-7a\times 8b}{7a(7a+2b)}$

Donc : $x-y=\dfrac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$

$x-y=\dfrac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\dfrac{(7a)^2-2\times 7a\times 2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$

Donc : $x-y=\dfrac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^+$

Car : $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^+$ et $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^+$

D'où $x\geq y$

Exercice11 : (**)

Soit x un élément de l'intervalle $]-1,+\infty[$

Comparer : 12 **et** $-5x+1$ on utilisant les propriétés de l'ordre.

Corrigé : On a $x\in]-1;+\infty[$ donc : $x\succ -1$

Donc : $-5x\prec -5\times(-1)$ c'est à dire : $-5x\prec 5$

Donc : ① $-5x+1\prec 6$ et on sait que : $6\prec 12$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-5x+1\prec 12$

Exercice12 : (**) Soit x un élément de l'intervalle $]6,+\infty[$; Montrer que : $2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\succ 0,5$

On utilisant les propriétés de l'ordre.

Corrigé : On a $x\in]6;+\infty[$ donc : $x\succ 6$

Donc : $\dfrac{1}{x}\prec\dfrac{1}{6}$ donc : $\dfrac{2}{x}\prec\dfrac{2}{6}$ car $2\succ 0$

C'est-à-dire : $\dfrac{2}{x}\prec\dfrac{1}{3}$ par suite : $-\dfrac{2}{x}\succ -\dfrac{1}{3}$ ①

Or on a : $\dfrac{3}{x^2}\geq 0$ ② car $x^2\geq 0$ et $3\geq 0$

① + ② donne : $-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\succ -\dfrac{1}{3}$ et on ajoute 2

On trouve : $2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\succ 2-\dfrac{1}{3}$

C'est-à-dire : $2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\succ\dfrac{5}{3}$.

Or on a : $\dfrac{5}{3}\succ 0.5$ donc : $2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\succ 0,5$

Exercice13 :(**) Soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$; $y\in\mathbb{R}^{*+}$ et $x\neq y$

Donner le signe du quotient suivant : $Z=\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$.

Corrigé : $x\rangle 0$ et $y\rangle 0$ et $x\neq y$

$Z=\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{y-x}{xy}}=(x-y)(x+y)\times\dfrac{xy}{y-x}$

Donc : $Z=(x-y)(x+y)\times\dfrac{xy}{-(x-y)}=-xy(x+y)$

On a $x\rangle 0$ et $y\rangle 0$ donc $xy>0$ c'est-à-dire : $-xy<0$

Et on a : $x+y>0$ par suite : $Z<0$.

Exercice14 : (**) Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de la valeur absolue).

1) $|-3|$ 2) $|3|$ 3) $\left|-\dfrac{3}{5}\right|$

4) $|\sqrt{5}-2|$ 5) $|1-\sqrt{3}|$ 6) $|\pi-4|$

7) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ 8) $|3-2\sqrt{3}|$

9) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|-|9-5\sqrt{3}|$

Corrigé :1) $|-3|=-(-3)=3$ 2) $|3|=3$ 3) $\left|-\dfrac{3}{5}\right|=\dfrac{3}{5}$

4) $|\sqrt{5}-2|$ On compare : $\sqrt{5}$ et 2

On a $(\sqrt{5})^2=5$ et $(2)^2=4$ donc $\sqrt{5}>2$

Par suite $(\sqrt{5}-2)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc $|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

5) $|1-\sqrt{3}|$ On compare : $\sqrt{3}$ et 1

On a $(\sqrt{3})^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$

Par suite $(1-\sqrt{3})\in\mathbb{R}^{-*}$.

Donc : $|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=-1+\sqrt{3}$

6) $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$ car $4>\pi$

7) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $(\sqrt{7})^2=7$ et $(\sqrt{2})^2=2$ donc : $\sqrt{7}>\sqrt{2}$

Par suite : $\sqrt{2}-\sqrt{7}<0$.

Donc $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|=-(\sqrt{2}-\sqrt{7})=-\sqrt{2}+\sqrt{7}$

8) On a : $3<2\sqrt{3}$ car $3^2<(2\sqrt{3})^2$

Alors : $3-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$.

Donc ; $|3-2\sqrt{3}|=-(3-2\sqrt{3})=-3+2\sqrt{3}$

9) On a : $4>2\sqrt{3}$ alors : $4-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^+$

On a : $3\sqrt{3}>5$ alors : $5-3\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$

On a : $9>5\sqrt{3}$ alors : $9-5\sqrt{3}\in\mathbb{R}^+$

$A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|-|9-5\sqrt{3}|$

$A=4-2\sqrt{3}--(5-3\sqrt{3})-(9-5\sqrt{3})$

$A=4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}-9+5\sqrt{3}=0$

Exercice15 : (Résoudre les équations suivantes :

1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$

3) $|x+2|=-1$ 4) $|x-1|+|2-x|-3=0$

Corrigé :1) $|x-1|=5$

Signifie que : $x-1=5$ ou $x-1=-5$
Signifie que : $x=6$ ou $x=-4$ Donc : $S=\{-4;6\}$

2) $|2x+1|=|x-3|$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

Signifie que : $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

Signifie que : $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ Donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ Car $|x+2|\geq 0$

4) $|x-1|+|3-x|-3=0$

$x-1=0$ Signifie que : $x=1$
$3-x=0$ Signifie que : $x=3$

x	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$ 0	$+$	$+$
$\|x-1\|$	$-x+1$ 0	$x-1$	$x-1$
$3-x$	$+$	$+$ 0	$-$
$\|3-x\|$	$3-x$	$3-x$ 0	$x-3$
$\|x-1\|+\|3-x\|-3$	$1-2x$	-1	$2x-7$

Si : $x\leq 1$ alors : L'équation $|x-1|+|3-x|-3=0$

Devient : $-(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $4-2x-3=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{1}{2}\leq 1$; Donc : $S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1\leq x\leq 3$ alors l'équation devient :
$(x-1)+(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $-1=0$ Donc : $S_2=\varnothing$

Si : $x\geq 3$ alors l'équation devient :
$(x-1)-(3-x)-3=0$

Ce qui signifie que : $2x-7=0$

Ce qui signifie que : $x=\frac{7}{2}\geq 3$ Donc : $S_3=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Par conséquent : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$

Exercice16 : (**) 1) Calculer $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2$

Et comparer : $3\sqrt{2}$ et 5.

2) Simplifier $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$.

Corrigé :1)
$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times 3\sqrt{2}\times 5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times 5+25$

Donc : $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=43-30\sqrt{2}$

On a : $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $(5)^2=25$ donc $3\sqrt{2}>5$

Par suite : $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

2) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|3\sqrt{2}-5\right|=-\left(3\sqrt{2}-5\right)$

Car $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

Par suite : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

Exercice17 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$:

$0...]0;5]$; $5...]0;5]$; $2...[1;5]$; $1....[2;+\infty[$
$-1....]-\infty;0]$; $\{0;1;2\}...[0;3[$; $\{0;1;2\}...[0;2[$
$]0;3[....\mathbb{Q}$.

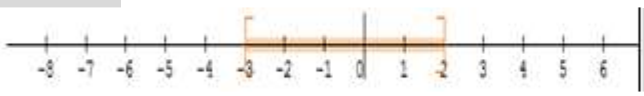
Corrigé : $0\notin]0;5]$; $5\in]0;5]$; $2\in[1;5]$;
$1\notin[2;+\infty[$; $-1\in]-\infty;0]$; $\{0;1;2\}\subset[0;3[$;
$\{0;1;2\}\not\subset[0;2[$; $]0;3[\not\subset\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}\in]0;3[$ et $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice18 : (*) Représenter les ensembles suivants sur la droite réelle puis les écrire à l'aide d'intervalles :

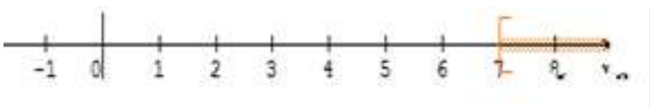
a) $-3\leq x\leq 2$ b) $x\geq 7$ c) $1>x$

d) $-4\leq x<1$ e) $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$.

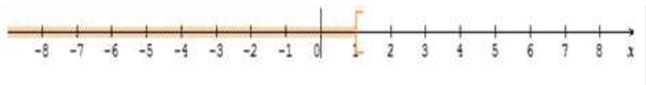
Corrigé : a) $-3\leq x\leq 2$ Signifie que : $x\in[-3;2]$



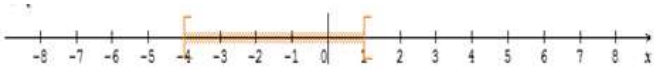
b) $x\geq 7$ Signifie que : $x\in[7;+\infty[$



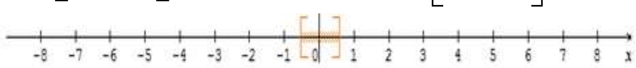
c) $1>x$ Signifie que : $x\in]-\infty;1[$



d) $-4\leq x<1$ Signifie que : $x\in[-4;1[$



e) $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ Signifie que : $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$



Exercice19 : (**) Simplifier si c'est possible

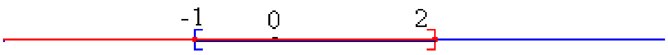
1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] 2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6]

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[

Corrigé :1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5]

2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[= [-1 ; 2]



4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[=]-∞ ; +∞[

Exercice20: (**) Calculer $I \cap J$ et $I \cup J$ dans les cas suivants.

1) $I =]-3,7]$ et $J = [-1,+\infty[$

2) $I =]-\infty,5[$ et $J = [4;10]$

3) $I = [0,10[$ et $J = [-5;-1]$

4) $I = \left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J = \left]-1,\frac{3}{2}\right[$

Corrigé :1) $I \cap J =]-1,7]$ et $I \cup J =]-3;+\infty[$

2) $I \cap J = [4,5[$ et $I \cup J =]-\infty;10]$

3) $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = [-5;10]$

4) $I \cap J = \left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I \cup J =]-1,2]$

Exercice21 : (**) Traduire chacune des inégalités suivantes ou encadrements par l'appartenance à un intervalle qui convient ; 1) $x \geq -3$ 2) $x < 5$

3) $1 \leq 2x \leq 4$ 4) $0 < 6x - 2 \leq 10$

5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$ 6) $x > -2$ et $x \leq 2$

7) $x \leq 0$ ou $x > 0$ 8) $x > 1$ et $x \leq 0$

9) $|x-2| < 1$ 10) $|x+1| \geq 2$ 11) $1 < |x-1| < 2$

Corrigé :1) $x \geq -3$ Equivaut à : $x \in [-3,+\infty[$.

2) $x < 5$ Equivaut à : $x \in]-\infty,5[$.

3) $1 \leq 2x \leq 4$ équivaut à : $\frac{1}{2} \times 1 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq 4 \times \frac{1}{2}$

Signifie que : $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ c'est à dire : $x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$

4) $0 < 6x - 2 \leq 10$ équivaut à :

$0 + 2 < 6x - 2 + 2 \leq 10 + 2$ équivaut à : $2 < 6x \leq 12$

Équivaut à : $2 \times \frac{1}{2} < 6x \times \frac{1}{2} \leq 12 \times \frac{1}{2}$

C'est à dire : $1 < 3x \leq 6$

Équivaut à : $1 \times \frac{1}{3} < 3x \times \frac{1}{3} \leq 6 \times \frac{1}{3}$

Équivaut à : $\frac{1}{3} < x \leq 2$ c'est à dire : $x \in \left]\frac{1}{3},2\right]$

5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$ Équivaut à : $-8 - 2 \leq 2 - 2x - 2 \leq 6 - 2$

Équivaut à : $-10 \leq -2x \leq 4$

Équivaut à : $-10 \times \frac{1}{2} \leq -2x \times \frac{1}{2} \leq 4 \times \frac{1}{2}$

Équivaut à : $-5 \leq -x \leq 2$ c'est à dire : $-2 \leq x \leq 5$

Équivaut à : $x \in [-2,5]$

6) $x > -2$ et $x \leq 2$

Signifie que : $x \in]-2;+\infty[$ et $x \in]-\infty,2]$

Signifie que: $x \in]-2;+\infty[\cap]-\infty,2]$

Signifie que: $x \in]-2;2]$

7) $x \leq 0$ ou $x > 0$ signifie : $x \in]-\infty,0]$ ou $x \in]0;+\infty[$

Signifie que: $x \in]-\infty,0] \cup]0;+\infty[$

Par suite : $x \in \mathbb{R}$

8) $x > 1$ et $x \leq 0$ signifie : $x \in]1;+\infty[$ et $x \in]-\infty,0]$

Signifie que: $x \in]-\infty,0] \cap]1;+\infty[$

Par suite : $x \in \varnothing$

9) $|x-2| < 1$ signifie $-1 < x - 2 < 1$

C'est-à-dire : $-1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2$

Signifie $1 < x < 3$ c'est-à-dire que : $x \in]1;3[$

10) $|x+1| \geq 2$ signifie $x + 1 \geq 2$ ou $x + 1 \leq -2$

Signifie que : $x \geq 1$ ou $x \leq -3$

Par suite : $x \in]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

11) $1 < |x-1| < 2$ Signifie $\begin{cases} |x-1| < 2 \\ |x-1| > 1 \end{cases}$

Signifie: $\begin{cases} -2 < x - 1 < 2 \\ et \\ x - 1 < -1 \ ou \ x - 1 > 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ et \\ x < 0 ou x > 2 \end{cases}$

C'est-à-dire que : $x \in]-1;3[\cap (]-\infty;0[\cup]2;+\infty[)$

C'est-à-dire que : $x \in]-1;3[\cap]-\infty;0[\cup]-1;3[\cap]2;+\infty[$

Signifie $x \in]-1;0[\cup]2;3[$

Exercice22 : (**) Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \succ 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \succ 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \succ 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 \prec x \prec 10 \end{cases}$

Corrigé : { c'est l'intersection 1) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x \succ 2 \end{cases}$

$x \geq -3$ Signifie que : $x \in [-3,+\infty[$

Et $x > 2$ Signifie que : $x \in]2,+\infty[$

Donc : $S=]2,+\infty[\cap[-3,+\infty[=]2,+\infty[$

2) $\begin{cases} x \succ 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ On a : $x\leq 4$ Signifie que : $x\in]-\infty,4]$

Et $x>5$ Signifie que : $x\in]5,+\infty[$

Donc : $S=]5,+\infty[\cap]-\infty,4]=\varnothing$

3) $x>7$ Signifie que : $x\in]7,+\infty[$

Et $x\geq 0$ Signifie que : $x\in[0,+\infty[$

Donc : $S=]7,+\infty[\cap[0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $\begin{cases} -3\leq x\leq 0 \\ -7\langle x\langle 10 \end{cases}$

$x\in]-7;10[$ Signifie que : $-7<x<10$

$-3\leq x\leq 0$ Signifie que : $x\in[-3;0]$

Donc : $S=]-7;10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

Exercice23: (**) x est un réel tel que : $-1 < x < 2$.
On pose : B = $-2x-3$. Trouver un encadrement de B et trouer son amplitude

Corrigé : $-1 < x < 2$ Signifie que : $-4<-2x<2$
Signifie que : $-4-3<-2x-3<2-3$
Signifie que : $-7<-2x-3<-1$
Donc : $-7<B<-1$: encadrement de B
$-1-(-7)=-1+7=6$: est l'amplitude de l'encadrement

Exercice24 : (*) On considère l'intervalle $I=[-3;4]$

Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle I

Corrigé : $\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$ Est le milieu de l'intervalle I.

$4-(-3)=7$ Est l'amplitude de l'intervalle I.

$\frac{4-(-3)}{2}=\frac{7}{2}$ Est le rayon de l'intervalle I.

Exercice25 : (**) Déterminer un intervalle ouvert I sachant que son centre est -3 et son rayon est 4

Corrigé :

Pour déterminer $]a;b[$ on va déterminer a et b.

On a donc : $\frac{a+b}{2}=-3$ et $\frac{b-a}{2}=4$

On va résoudre donc le système suivant :

$\begin{cases} (1)\, a+b=-6 \\ (2)\, b-a=8 \end{cases}$ $(1)+(2)$ Donne : $2b=2$ donc : $b=1$

Par suite : $a+1=-6$ donc : $a=-7$

Par conséquent : l'intervalle ouvert est $I=]-7;1[$

Exercice26 : (**) Calculer le rayon de l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2};b\right]$ sachant que son centre est : $c=\frac{7}{2}$

Corrigé : Le rayon de l'intervalle I est $r=\frac{b-\frac{1}{2}}{2}$

Nous allons calculer la deuxième borne b :

Nous avons le centre $c=\frac{7}{2}$ et nous savons que :

$c=\frac{b+\frac{1}{2}}{2}$ D'où : $\frac{7}{2}=\frac{b+\frac{1}{2}}{2}$ ou encore : $2\frac{7}{2}=b+\frac{1}{2}$

Donc : $b=\frac{13}{2}$. Par suite : $r=\frac{\frac{13}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{6}{2}=3$

Exercice27 : (**) Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\left|x+\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$

Trouver l'intervalle qui correspond à cette inégalité.

Corrigé : ($x\in\mathbb{R}$ et $\left|x+\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$)

Signifie ($x\in\mathbb{R}$ et $|x-c|<r$) avec : $c=-\sqrt{2}$ et $r=\frac{1}{2}$

Donc : ($x\in\mathbb{R}$ et $\left|x+\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$) signifie (x appartient à l'intervalle ouvert de centre $c=-\sqrt{2}$ et de rayon $r=\frac{1}{2}$ C'est-à-dire : $x\in\left]-\sqrt{2}-\frac{1}{2},-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right[$

Exercice28 : (**) Trouver les nombres c et r tels que : $|x-c|\leq r$ et $x\in[-4;6]$

Corrigé : $|x-c|\leq r$ signifie x appartient à l'intervalle de centre c et de rayon r
Or $x\in[-4;6]$

Donc : $c=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1$ et $r=\frac{6-(-4)}{2}=\frac{10}{2}=5$

Exercice29 : (**) (*Résolution des inéquations)*
Résoudre les inéquations suivantes :
1) $|x-1|\leq 2$ 2) $|x+2|\geq 3$ 3) $|2x+1|<6$

Corrigé : 1) $|x-1|\leq 2$ Signifie que: $-2\leq x-1\leq 2$
Signifie : $-2+1\leq x-1+1\leq 2+1$
Signifie : $-1\leq x\leq 3$ donc : $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\geq 3$ Signifie $x+2\geq 3$ ou $x+2\leq -3$

Signifie : $x\geq 1$ ou $x\leq -5$

Signifie : $x\in[1;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;-5]$

Donc $S=]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ Signifie $-6<2x+1<6$

Signifie que : $-6-1<2x+1-1<6-1$
Signifie que : $-7<2x<5$
Signifie $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$

C'est-à-dire que : $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ donc : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

Exercice30: (***) Résoudre l'inéquation suivante : $|2x-1|+3|x-2|\succ 4$

Corrigé : $x-2=0$ Signifie que : $x=2$

$2x-1=0$ Signifie que : $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2x-1$	$-$ 0	$+$	$+$
$\|2x-1\|$	$-2x+1$ 0	$2x-1$	$2x-1$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$
$\|2x-1\|+3\|x-2\|$	$7-5x$	$-x+5$	$5x-7$

Si : $x\le\frac{1}{2}$ alors : $|2x-1|+3|x-2|\succ 4$

Devient : $-(2x-1)-3(x-2)-4\succ 0$

Ce qui signifie que : $-5x+3\succ 0$

C'est-à-dire : $x\prec\frac{3}{5}$

Donc : $S_1=\left]-\infty;\frac{3}{5}\right[\cap\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

Si : $\frac{1}{2}\le x\le 2$ alors l'inéquation devient :

$(2x-1)-3(x-2)-4\succ 0$

Ce qui Signifie que : $-x+1\succ 0$
Signifie que : $x\prec 1$

Donc : $S_2=\left[\frac{1}{2};2\right]\cap\left]-\infty;1\right]=\left[\frac{1}{2};1\right[$

Si : $x\ge 2$ alors l'inéquation devient $(2x-1)+3(x-2)-4\succ 0$

Ce qui Signifie que : $5x-11\succ 0$

Ce qui Signifie que : $x\succ\frac{11}{5}$

Donc : $S_3=\left]\frac{11}{5};+\infty\right[\cap[2;+\infty[=\left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Par conséquent :

$S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right[\cup\left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Ce qui Signifie que $S=[-\infty;1[\cup\left]\frac{11}{5};+\infty\right[$

Exercice31 : (**) Soient x et y deux réels différents et non nuls tels que: $|x|<\frac{1}{4}$ et $|y-2|<\frac{1}{4}$

Montrer que : $\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

Corrigé : $|x|<\frac{1}{4}$ Signifie que : $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{1}{4}<-x<\frac{1}{4}$ (1)

Et nous avons : $|y-2|<\frac{1}{4}$ Signifie $-\frac{1}{4}<y-2<\frac{1}{4}$

Signifie que : $-\frac{1}{4}+2<y-2+2<\frac{1}{4}+2$

C'est-à-dire : $\frac{7}{4}<y<\frac{9}{4}$ (2)

En sommant (1) et (2) nous déduisons :

$\frac{6}{4}<y-x<\frac{10}{4}$ cad $\frac{3}{2}<y-x<\frac{5}{2}$

Cette inégalité est équivalente à : $\frac{2}{5}<\frac{1}{y-x}<\frac{2}{3}$ (3)

De (2) nous déduisons : $\frac{7}{2}<2y<\frac{9}{2}$ (4)

(3) et (4) Donnent par multiplication : $\frac{7}{5}<\frac{2y}{y-x}<3$

Exercice32 : (**) Soient $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ et $|4x+y|<\frac{1}{3}$

Montrer que : $\frac{y}{x}\in\left]-\frac{28}{3};-\frac{4}{3}\right[$

Corrigé : On a : $|4x+y|<\frac{1}{3}$ Signifie $-\frac{1}{3}<4x+y<\frac{1}{3}$ (1)

Et on a : $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ donc $1\le 4x\le 2$

Signifie $-2\le -4x\le -1$ (2)

(1)+(2) donne : $-\frac{1}{3}+(-2)<4x+y+(-4x)<\frac{1}{3}+(-1)$

(2) qui signifie : $-\frac{7}{3}<y<\frac{-2}{3}$

Par suite : $\frac{2}{3}<-y<\frac{7}{3}$ et on a aussi : $2<\frac{1}{x}<4$

Donc : $\frac{2}{3}\times 2<\frac{1}{x}\times(-y)<\frac{7}{3}\times 4$ C'est-à-dire : $\frac{4}{3}<-\frac{y}{x}<\frac{28}{3}$

Par suite : $-\frac{28}{3}<\frac{y}{x}<-\frac{4}{3}$ donc : $\frac{y}{x}\in\left]-\frac{28}{3};-\frac{4}{3}\right[$

Exercice33 : (***) Soient x et y deux réels tels que: $y \geq -2$ et $x \leq \frac{1}{5}$ et $x - y = 1$

1) Calculer : $E = \sqrt{(5x-1)^2} + \sqrt{(5y+10)^2}$.

2) Montrer que : $-1 \leq x \leq \frac{1}{5}$ et $-2 \leq y \leq -\frac{4}{5}$.

3) Calculer : $F = |x+y+3| + \left|x+y+\frac{3}{5}\right|$.

Corrigé :1) On a:

$E = \sqrt{(5x-1)^2} + \sqrt{(5y+10)^2} = |5x-1| + |5y+10|$

Or on a : $x \leq \frac{1}{5}$ donc : $5x \leq 1$

Qui signifie que : $5x - 1 \leq 0$

On a aussi : $y \geq -2$ donc : $5y \geq -10$

Qui signifie que : $5y + 10 \geq 0$

Donc : $E = |5x-1| + |5y+10| = -(5x-1) + (5y+10)$

Car $5x - 1 \leq 0$ et $5y + 10 \geq 0$

Donc : $E = -5x+1+5y+10 = -5(x-y)+11 = -5\times1+11 = 6$

Car $x - y = 1$

2) a)Pour montrer que $-1 \leq x \leq \frac{1}{5}$ il suffit de montrer que : $-1 \leq x$ car : $x \leq \frac{1}{5}$.

On sait que: $y \geq -2$ et $x - y = 1$

Ce qui signifie que $x - 1 = y$

Donc: $x - 1 \geq -2$ par suite : $x \geq -1$

b) Pour montrer que $-2 \leq y \leq -\frac{4}{5}$

il suffit de montrer que : $y \leq -\frac{4}{5}$ car $-2 \leq y$.

On sait que: $x \leq \frac{1}{5}$ et $x - y = 1$

Ce qui signifie que : $x = y + 1$.

Donc: $y + 1 \leq \frac{1}{5}$ par suite : $y \leq \frac{1}{5} - 1$

C'est-à-dire : $y \leq -\frac{4}{5}$.

3) Calculons : $F = |x+y+3| + \left|x+y+\frac{3}{5}\right|$

On a : $-1 \leq x \leq \frac{1}{5}$ et $-2 \leq y \leq -\frac{4}{5}$.

Donc : $-1-2 \leq x+y \leq \frac{1}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)$.

Qui signifie que: $x + y \leq \frac{-3}{5}$.

Signifie que: $0 \leq x+y+3$ et $x+y+\frac{3}{5} \leq 0$

Donc : $|x+y+3| = x+y+3$

et $\left|x+y+\frac{3}{5}\right| = -\left(x+y+\frac{3}{5}\right) = -x-y-\frac{3}{5}$

Par suite : $F = x+y+3-x-y-\frac{3}{5} = 3-\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$.

Exercice34 : (**) Sachant que :

$(\pi = 3{,}1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5...)$

1) Montrer que : $3{,}14$ est une valeur approchée décimale du réel π à 10^{-2} près

2) Donner une valeur approchée de du réel π à 10^{-5} près

Corrigé :1) On a : $3{,}13 < \pi < 3{,}15$

Donc : $3{,}13 - 3{,}14 < \pi - 3{,}14 < 3{,}15 - 3{,}14$

Donc : $-0{,}01 < \pi - 3{,}14 < 0{,}01$

Donc : $|\pi - 3{,}14| < 10^{-2}$.

Qui signifie que : $3{,}14$ est une valeur approchée du réel π à 10^{-2} près

2) On a : $3{,}14159 < \pi < 3{,}14161$ donc :

$3{,}14159 - 3{,}14160 < \pi - 3{,}14160 < 3{,}14161 - 3{,}14160$

Donc : $-10^{-5} < \pi - 3{,}14160 < -10^{-5}$

Donc : $|\pi - 3{,}14160| < 10^{-5}$

Qui signifie que : $3{,}14160$ est une valeur approchée du réel π à 10^{-5} près.

Exercice35 : (** sachant que : $\left(\sqrt{3} = 1.732050808...\right)$

Donner un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près

Et préciser une valeur approchée décimale par défaut et par excès à 10^{-2} près.

Corrigé : On a : $\left(\sqrt{3} \simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73 \leq \sqrt{3} \leq 1.74$ et ② $1.732 \leq \sqrt{3} \leq 1.733$

① Est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74 - 1.73$ près

C'est-à-dire : à $10^{-2} = 0.01$ près

② Est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733 - 1.732$ près C'est-à-dire : à $10^{-3} = 0.001$ près

Et on a : 1.73 est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{3}$ par défaut à 10^{-2} près

1.74 : Est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{3}$ par excès à 10^{-2} près.

Exercice36: (**) Donner une valeur approchée décimale de $\sqrt{10}$ par défaut et par excès à 3×10^{-3} près (Utiliser la calculatrice : $\left(\sqrt{10}\simeq 3.16227766...\right)$)

Corrigé : On a : $3.162<\sqrt{10}<3.165$.

Et on a : $3.165-3.162=0.003=3\times10^{-3}$

Donc : 3.162 est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{10}$ par défaut à 3×10^{-3} près.

Et 3.165 est une valeur approchée décimale du réel $\sqrt{10}$ par excès à 3×10^{-3} près.

Exercice37 : (**) $x\in[1;3]$ et $y\in[2;4]$ et $z\in[-3;-1]$

1) Trouver un encadrement de : x^2 ; y^2 ; $2x$ $3y$; $-x$; $-y$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{x}{y}$ et $y\times z$

2) Trouver un encadrement de : $A=x^2+y^2+2x-3y$ et $B=\frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

Corrigé : 1) $x\in[1;3]$ Signifie que : $1\le x\le 3$

$y\in[2;4]$ Signifie que : $2\le y\le 4$

On a $1\le x\le 3$ donc $1^2\le x^2\le 3^2$

C'est-à-dire : $1\le x^2\le 9$

On a $2\le y\le 4$ donc $2^2\le y^2\le 4^2$

C'est-à-dire : $4\le y^2\le 16$

On a $1\le x\le 3$ donc $2\times1\le 2x\le 2\times3$

C'est-à-dire : $2\le 2x\le 6$

On a $2\le y\le 4$ donc $3\times2\le 3\times y\le 3\times4$

C'est-à-dire : $6\le 3y\le 12$

On a $1\le x\le 3$ donc $-3\le -x\le -1$

On a $2\le y\le 4$ donc $-4\le -y\le -2$

On a $1\le x\le 3$ donc $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le 1$

On a $2\le y\le 4$ donc $\frac{1}{4}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

On a $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$ donc $1\times\frac{1}{4}\le x\times\frac{1}{y}\le 3\times\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{4}\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$

Encadrement de $y\times z$:

On a $2\le y\le 4$ et $-3\le z\le -1$

Donc : $2\le y\le 4$ et $1\le -z\le 3$

Donc : $2\times1\le y(-z)\le 4\times3$

Donc : $2\le -yz\le 12$ par suite : $-12\le yz\le -2$

2) Encadrement de $A=x^2+y^2+2x-3y$

$6\le 3y\le 12$ Donc $-12\le -3y\le -6$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$1+4+2-12\le x^2+y^2+2x-3y\le 9+16+6-6$

Donc ① $-5\le A\le 25$: ① est un encadrement du réel A à $25-(-5)=30$ près

Encadrement de : $B=\frac{2x-1}{x+1}$

On a $B=\frac{2x-1}{x+1}=(2x-1)\times\frac{1}{x+1}$ et on a $1\le x\le 3$

Donc $2\le 2x\le 6$

Donc : $2-1\le 2x-1\le 6-1$ cad : $1\le 2x-1\le 5$ ❸

Et on a $1\le x\le 3$ donc $2\le x+1\le 4$

Alors : $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$ ❹.

On fait la produit membre a membre de ❸ et ❹

On trouve : $1\times\frac{1}{4}\le(2x-1)\times\frac{1}{x+1}\le 5\times\frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{4}\le B\le\frac{5}{2}$ est un encadrement du réel B

D'amplitudes $r=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

Exercice38 : (***) $x\in[-3;2]$ **et** $y\in[-7;1]$

Trouver un encadrement de : $x+2y$ et $2x-y$ et $-5x+3y-8$ et xy.

Corrigé : $x\in[-3;2]$ Signifie $-3\le x\le 2$

et $y\in[-7;1]$ Signifie $-7\le y\le 1$

Donc : $-7\times2\le 2y\le 1\times2$

Par suite : $-7\times2+(-3)\le 2y+x\le 1\times2+2$

C'est-à-dire : $-17\le 2y+x\le 4$

On a : $-6\le 2x\le 4$ et $-1\le -y\le 7$

Donc $-6-1\le 2x-y\le 4+7$ cad $-7\le 2x-y\le 11$

On a : $-3\le x\le 2$ donc : $-10\le -5x\le 15$ et on a : $-7\le y\le 1$ donc : $-21\le 3y\le 3$

Par suite : $-31\le -5x+3y\le 18$

Par conséquent : $-23\le -5x+3y+8\le 26$.

<u>Encadrement de :</u> xy

On a : $-3\le x\le 2$ et $-7\le y\le 1$

1ére cas : $-3\le x\le 0$ et $-7\le y\le 0$

On a donc : $0\le -x\le 3$ et $0\le -y\le 7$

Alors on a : $0\le(-x)\times(-y)\le 21$

Par suite : $0\le xy\le 21$ (1)

2ére cas : $-3\le x\le 0$ et $0\le y\le 1$

On a donc : $0\le -x\le 3$ و $0\le y\le 1$

Alors on a : $0\le(-x)\times y\le 3$

Par suite : $-3 \le xy \le 0$ (2)

3ére cas : $0 \le x \le 2$ et $-7 \le y \le 0$

On a donc : $0 \le x \le 2$ et $0 \le -y \le 7$

Alors on a : $0 \le (-y) \times x \le 14$

Par suite : $-14 \le xy \le 0$ (3)

4ére cas : $0 \le x \le 2$ et $0 \le y \le 1$

Alors on a : $0 \le xy \le 2$ (4)

De : (1) ; (2) ; (3) et (4)

En déduit que : $-14 \le xy \le -21$.

Exercice39 : (**) 1) Effectuer et calculer : $\left(\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)^2$.

2) On pose : $E=\sqrt{19-4\sqrt{21}}$

a) Simplifier : E

b) Si on a : $1,73<\sqrt{3}<1,74$ et $2,64<\sqrt{7}<2,65$

Donner est une valeur approchée du réel E par défaut et excès à $0,5$ près.

Corrigé :

1) $\left(\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2-2\times\sqrt{7}\times 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$\left(\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)^2=7-4\sqrt{21}+12=19-4\sqrt{21}$

2) a) $E=\sqrt{19-4\sqrt{21}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right|$

$E=-\sqrt{7}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{7}$

car $\sqrt{7}-2\sqrt{3}<0$ ($\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ et $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$)

b) On a : $E=2\sqrt{3}-\sqrt{7}=2\sqrt{3}+\left(-\sqrt{7}\right)$

Or on a : $1,73<\sqrt{3}<1,74$ donc $3,46<2\sqrt{3}<3,48$

Et on a : $2,64<\sqrt{7}<2,65$

Donc : $-2,65<-\sqrt{7}<-2,64$

Par suite : $3,46-2,65<2\sqrt{3}-\sqrt{7}<3,48-2,64$

Ce qui signifie que : $0,81<A<0,84$

Et puisque : $0,84-0,81=0,03=3\times10^{-2}$ alors :

- $0,84$ Est une valeur approchée du réel E par excès à 3×10^{-2} près.
- $0,81$ Est une valeur approchée du réel E par défaut à 3×10^{-2} près.

Exercice40: (**) Soient : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$.

On pose : $E=x^2-y^2+2x+2y$

1) Trouver un encadrement de : E et déterminer son amplitude.

2) Vérifier que : $E=(x+y)(x-y+2)$ et en déduire un autre encadrement de E et comparer les amplitudes des deux encadrements.

3) En déduire que : $4\le E\le 9$.

Corrigé : 1) Encadrement de : $E=x^2-y^2+x+y$

On a : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$ donc : $1\le x^2\le 9$ et $\frac{1}{4}\le y^2\le 1$ donc : $-1\le -y^2\le -\frac{1}{4}$

Et on a : $2\le 2x\le 6$ et $1\le 2y\le 2$

Donc : $1+-1+2+2\le x^2-y^2+x+y\le 9+\left(-\frac{1}{4}\right)+6+2$

Ce qui signifie que: $4\le E\le \frac{67}{4}$ (α)

Son amplitude est : $\frac{67}{4}-4=\frac{51}{4}=12,75$

2) On a : $E=x^2-y^2+2x+2y$

Donc : $E=(x+y)(x-y)+2(x+y)$

Et par suite : $E=(x+y)(x-y+2)$

Déduction : on a : $1\le x\le 3$ et $\frac{1}{2}\le y\le 1$.

Donc : $\frac{3}{2}\le x+y\le 4$ (1)

Et on a : $-1\le -y\le -\frac{1}{2}$ donc : $1-1\le x-y\le 3-\frac{1}{2}$

Ce qui signifie que: $0\le x-y\le \frac{5}{2}$

Par suite on a : $2\le x-y+2\le \frac{9}{4}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $3\le (x+y)(x-y+2)\le 9$

Ce qui signifie que: $3\le E\le 9$ (β) donc c'est un autre encadrement de E

Son amplitude est : $9-3=6<12,75$

3) Déduction : des relations (α) et (β) en déduit que : $E\in\left[4;\frac{67}{4}\right]$ et $E\in[3;9]$

Donc : $E\in\left[4;\frac{67}{4}\right]\cap[3;9]$ ce qui signifie que :

$E\in[4;9]$ c'est-à-dire : $4\le E\le 9$

Exercice41 : (**) 1) Vérifier que $14^2<200<15^2$ et en déduire que ; $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$.

3) En déduire un encadrement de : $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$.

Corrigé :1) On a $14^2=196$ et $15^2=225$

Donc : $14^2 < 200 < 15^2$

C'est-à-dire : $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

Donc : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times100} < \sqrt{15^2}$

C'est-à-dire : $14 < \sqrt{2}\times10 < 15$

Donc : $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

Cela équivaut à : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) On a $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$ donc : $22^2 < 500 < 23^2$

C'est-à-dire : $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$.

Donc : $22 < \sqrt{5}\times10 < 23$

Cela équivaut à : $22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$

Par suite : $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) On a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

Donc : $1,4+2,2 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,5+2,3$.

Donc : $3,6 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,8$

On a : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

Donc : $1,4\times2,2 < \sqrt{2}\times\sqrt{5} < 1,5\times2,3$

Donc $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

Exercice42 : (**) $x\in[-3;1]$ et $y\in[-6;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$

3) x^2 4) y^2 5) $x\times y$ 6) $\frac{x}{y}$

Corrigé : 1) $x\in[-3;1]$ signifie $-3\le x\le1$

$y\in[-6;-2]$ Signifie que : $-6\le y\le-2$

Donc $(-3)+(-6)\le x+y\le 1+(-2)$

C'est-à-dire : $-9\le x+y\le-1$

2) On a $x-y = x+(-y)$ et on a $-6\le y\le-2$

Donc $2\le -y\le 6$

Donc $(-3)+2\le x+(-y)\le 1+6$

C'est-à-dire : $-1\le x-y\le 7$

3) On a $-3\le x\le1$ donc $0\le x\le1$ ou $-3\le x\le0$

Donc $0^2\le x^2\le1^2$ ou $0^2\le x^2\le(-3)^2$

Donc $0\le x^2\le1$ ou $0\le x^2\le9$

Par suite : $0\le x^2\le9$

4) On a $-6\le y\le-2$ donc $(-2)^2\le y^2\le(-6)^2$

Par suite : $4\le y^2\le36$

5) Encadrement de : $x\times y$

On a : $-3\le x\le1$ et $-6\le y\le-2$

- Si $0\le x\le1$

On a $-6\le y\le-2$ alors on a : $2\le -y\le6$

Donc $0\le -xy\le6$ par suite ① $-6\le xy\le0$

- Si $-3\le x\le0$ alors $0\le -x\le3$ et on a $2\le -y\le6$ donc ② $0\le xy\le18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6\le xy\le18$

6) Encadrement de $\frac{x}{y}$:on a $-6\le y\le-2$

Donc : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{y}\le-\frac{1}{6}$

Donc : $\frac{1}{6}\le-\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$ et $-3\le x\le1$

- Si $0\le x\le1$: On a $\frac{1}{6}\le-\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

Alors $0\le x\times\left(-\frac{1}{y}\right)\le\frac{1}{2}$

Donc $0\le-\frac{x}{y}\le\frac{1}{2}$ par suite : ③ $-\frac{1}{2}\le\frac{x}{y}\le0$

- Si $-3\le x\le0$ alors $0\le -x\le3$ et on a $\frac{1}{6}\le-\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$ donc ④ $0\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$

D'après ③ et ④ on déduit que : $-\frac{1}{2}\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$

Exercice43 : (**) Sachant que : $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$

Montrer que : $\left|\sqrt{2}-1,40\right| < 0,02$

Que peut-on déduire ?

Corrigé : On a : $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$

Donc : $-0,02 < \sqrt{2}-1,40 < 0,02$

Donc : $\left|\sqrt{2}-1,40\right| < 0,02$

Donc : $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

On a $1,40\le\sqrt{2} < 1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

On a $1,42-0,02 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

Exercice44: (**) Sachant que : $2,645\le\sqrt{7}\le2,646$

a) Que représente $2,645$ pour $\sqrt{7}$?

B) Que représente $2,646$ pour $\sqrt{7}$?

Corrigé : a) $2,645$ est une valeur approchée du réel $\sqrt{7}$ par défaut à 10^{-3} près

b) $2,645$ est une valeur approchée du réel $\sqrt{7}$ par excès à 10^{-3} près

Exercice45 : (***) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Le nombre $1,12$ est une valeur approchée décimale du réel x par excès à 10^{-2} près

Le nombre $1,11$ est une valeur approchée décimale du réel y par défaut à 10^{-2} près

Montrer que : $1,244$ est une valeur approchée du réel xy à 12×10^{-3} près

Corrigé : $1,12$ Est une valeur approchée décimale du réel x par excès à 10^{-2} près

Signifie : $1,11 \le x < 1,12 \quad (1)$

$1,11$ Est une valeur approchée décimale du réel y par défaut à 10^{-2} près signifie : $1,11 \le y < 1,12 \quad (2)$

De (1) et (2) nous déduisons que :

$(1,11)^2 \le xy < (1,12)^2$ d'où : $1,2321 \le xy < 1,2544$

Par suite : $1,2321 - 1.244 \le xy - 1.244 \le 1,2544 - 1.244$

Cela équivaut à : $-0,012 \le xy - 1.244 \le 0,012$

Cela équivaut à : $|xy - 1.244| \le 0,012$

Cela signifie que : $1,244$ est une valeur approchée du réel xy à 12×10^{-3} près

Exercice46 : (**) 1) Vérifier que : $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Par la même méthode : donner un encadrement de : $\sqrt{5}$

3) En déduire un encadrement de : $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

Corrigé : 1) On a : $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$

Donc : $14^2 < 200 < 15^2$

On a : $14^2 < 200 < 15^2$ donc : $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

Equivaut à : $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times100} < \sqrt{15^2}$

Donc : $14 < \sqrt{2}\times10 < 15$

Donc : $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

Par suite : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) On a : $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$

Donc : $22^2 < 500 < 23^2$

On a donc : $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

Donc : $22 < \sqrt{5}\times10 < 23$

Equivaut à : $22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$

Par suite : $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) On a : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

Donc : $1,4+2,2 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,5+2,3$

Equivaut à : $3,6 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,8$

On a aussi : $1,4\times2,2 < \sqrt{2}\times\sqrt{5} < 1,5\times2,3$

Par suite : $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

Exercice47: (***) Soient x et y deux réels tels que : $x < y < 3$

1) Montrer que : $x + y - 6 \prec 0$

2) Comparer $a = x^2 - 6x + 1$ et $b = y^2 - 6y + 1$

Corrigé :1) On a $x < y < 3$ donc $x < 3$ et $y < 3$

Donc **:** $x + y < 6$ donc : $x + y - 6 < 0$

2) $a - b = (x^2 - 6x + 1) - (y^2 - 6y + 1)$

$a - b = x^2 - 6x + 1 - y^2 + 6y - 1 = x^2 - y^2 - 6x + 6y$

$a - b = (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6)$

On a : $x < y$ donc $x - y \in \mathbb{R}^-$

Et on a : $x + y - 6 \in \mathbb{R}^-$

Donc : $(x - y)(x + y - 6) \in \mathbb{R}^+$

Donc : $a - b \in \mathbb{R}^+$ et par suite $a \ge b$

Exercice48 : (***) On pose

$B = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Donner le signe de : B

2) Calculer B^2

3) Donner une écriture simplifié de B

Corrigé : $B = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) On Remarque que : $6 - 2\sqrt{5} < 6 + 2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}} < \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Donc: $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}^{*-}$ cad $B < 0$

2) $B^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc :

$B^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc :

$B^2 = 6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)} + 6 + 2\sqrt{5}$

$B^2 = 12 - 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 12 - 2\sqrt{6^2 - 20} = 12 - 2\sqrt{16}$

Donc : $B^2 = 12 - 2\times4 = 4$

3) $B^2 = 4$ Equivaut à : $B = \sqrt{4}$ ou $B = -\sqrt{4}$

Donc : $B = 2$ ou $B = -2$ or $B < 0$

Donc : $B = -2$

Exercice49 : (***) **1)** Montrer que :

$\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) Montrer que :

$\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Corrigé :1) On pose : $B=\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer B^2 :

$$B^2=\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$$

$$B^2=6+2\sqrt{\frac{36-1}{4}}=6+2\sqrt{\frac{5}{4}}=6+\sqrt{5}$$

$$B^2=\frac{6+\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\left(\frac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\frac{6-\sqrt{31}}{2}\right)}+\frac{6-\sqrt{31}}{2}$$

Donc : $B^2=6+\sqrt{5}$

Donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

D'où: $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$??

On pose: $B=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$

Calculons B^2 ?

$$B^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$$

$$B^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$$

$$B^2=18+2\sqrt{81-79}=18+\sqrt{8}$$

Donc: $B^2=18+\sqrt{8}$

Donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $B=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Par suite: $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice50 : (***) soit $a\geq 1$ on pose : $A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

1) Montrer que : $a(A+1)(A-1)=1$

2) a) Montrer que : $2\leq A+1\leq 3$

b) En déduire que :$1+\frac{1}{3a}\leq A\leq 1+\frac{1}{2a}$

3) Montrer que : $1{,}1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1{,}2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Corrigé :1) $a\geq 1$ et $A=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

Montrons que : $a(A+1)(A-1)=1$?

On a : $(A+1)(A-1)=A^2-1=\left(\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)^2-1$

Donc : $(A+1)(A-1)=1+\frac{1}{a}-1=\frac{1}{a}$

Donc : $(A+1)(A-1)=\frac{1}{a}$ et par suite :

$a(A+1)(A-1)=1$

2) Montrons que : $2\leq A+1\leq 3$?

On a : $a\geq 1>0$ donc : $\frac{1}{a}\geq 0$ donc : $\frac{1}{a}+1\geq 1$

Donc : $A\geq 1$ donc : $A+1\geq 2$ (1)

On a : $a\geq 1$donc : $\frac{1}{a}\leq 1$ alors : $1+\frac{1}{a}\leq 2$

Donc : $A\leq\sqrt{2}$ par suite : $A+1\leq\sqrt{2}+1\leq 3$ (2)

De (1)et (2) en déduit que : $2\leq A+1\leq 3$

Et on a : $a(A+1)(A-1)=1$ donc : $A-1=\frac{1}{a(A+1)}$

D'autre part on a : $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{A+1}\leq\frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{3a}\leq\frac{1}{a(A+1)}\leq\frac{1}{2a}$

Donc : $\frac{1}{3a}\leq A-1\leq\frac{1}{2a}$

Donc : $\frac{1}{3a}+1\leq A\leq\frac{1}{2a}+1$

3) On a $1{,}2=1+0{,}2=1+\frac{1}{5}$ donc $A=\sqrt{1{,}2}=\sqrt{1+\frac{1}{5}}$

par suite : $a=5$

$\frac{1}{15}+1\leq\sqrt{1{,}2}\leq\frac{1}{10}+1$ Equivaut à : $\frac{16}{15}\leq\sqrt{1{,}2}\leq\frac{11}{10}$

Signifie que : $\frac{32}{30}\leq\sqrt{1{,}2}\leq\frac{33}{30}$ et on a $\frac{33}{30}-\frac{32}{30}=\frac{1}{30}$

$\left(\frac{33}{30}=1{,}1\right)$

Donc : $1{,}1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1{,}2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

Exercice51: (***) 1) a)Vérifier que pour tout

$x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que :

si $|x|\leq\frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\leq 2x^2$

2) Donner une valeur approchée du nombre :

$\frac{1}{0{,}99}$ à 2×10^{-4} près

Corrigé : 1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$;

$1+x+\frac{x^2}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x}=\frac{1^2-x^2+x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

b) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ tel que : $|x|\le\frac{1}{2}$

On a : $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\frac{1}{1-x}-(1+x)=\frac{x^2}{1-x}$

Donc : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\left|\frac{x^2}{1-x}\right|$

C'est-à-dire : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|=\frac{x^2}{|1-x|}$ (1)

Car : $x^2\ge 0$

On a : $|x|\le\frac{1}{2}$ Donc : $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $-\frac{1}{2}\le -x\le\frac{1}{2}$

Donc : $1-\frac{1}{2}\le 1-x\le 1+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\le 1-x\le\frac{3}{2}$

Et par suite : $\frac{2}{3}\le\frac{1}{1-x}\le 2$ donc : $-2\le\frac{2}{3}\le\frac{1}{1-x}\le 2$

Par suite : $\frac{1}{|1-x|}\le 2$ et puisque : $x^2\ge 0$

Alors : $\frac{x^2}{|1-x|}\le 2x^2$ et d'après l'égalité (1)

On a donc : $\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right|\le 2x^2$

2) Déterminons une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près ???

D'après 1)b) on donne à x la valeur : $x=10^{-2}$ et puisque $|10^{-2}|\le\frac{1}{2}$

Alors : $\left|\frac{1}{1-10^{-2}}-(1+10^{-2})\right|\le 2\times(10^{-2})^2$

C'est-à-dire on a : $\left|\frac{1}{1-0,01}-(1+0,01)\right|\le 2\times10^{-4}$

Donc : $\left|\frac{1}{0,99}-1,01\right|\le 2\times10^{-4}$ et par suite : $1,01$ est une valeur approchée du nombre : $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près

Exercice52: (***) Soient a et b deux réels tel que : $a\in[0;2]$ et $b\in[0;2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) Sachant que : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\le 1,2\times10^{-1}$

Corrigé :1)

$\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3(2+b)-3(2+a)}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\left|\frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)}\right|=\left|\frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)}\right|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|=\frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|}=\frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|}$

Car : $|b-a|=|a-b|$

Or on a : $a\in[0;2]$ signifie $0\le a\le 2$

Et on a : $b\in[0;2]$ signifie $0\le b\le 2$

Donc : $2\le 2+a\le 4$ et $2\le 2+b\le 4$

Par suite : $4\le(2+b)(2+a)\le 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)|=(2+b)(2+a)$

Et on a aussi : $\frac{1}{16}\le\frac{1}{(2+b)(2+a)}\le\frac{1}{4}$

Donc : $\frac{3|a-b|}{16}\le\frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)}\le\frac{3|a-b|}{4}$

car : $3|a-b|\ge 0$

Par suite : $\frac{3}{16}|a-b|\le\left|\frac{3}{2+a}-\frac{3}{2+b}\right|\le\frac{3}{4}|a-b|$

2) On a : $0.866\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 0.867$ et $0.707\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le 0.708$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Et on a : $-0.708\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\le-0.707$

Donc : $0.866 - 0.708 \le \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \le 0.867 - 0.707$

Donc : $0.158 \le \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \le 0.16$ et $0.16 - 0.158 = 2\times10^{-3}$

Par suite : 0,16 est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

0,158 : Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

3) D'après 1) on a $\left|\frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b}\right| \le \frac{3}{4}|a-b|$

Donc : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| \le \frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

Et on a : $0.158 \le \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \le 0.16$

Donc : $0 \le \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \le 0.16$

Par suite : $\frac{3}{4}\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \le \frac{3}{4}\times 0.16 = 0.12$

Finalement : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| \le 0.12$

C'est-à-dire : $\left|\frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| \le 1,2\times10^{-1}$

Exercice53 : (***) Soient a et b et c des nombres réels positifs.

Montrer que : $(a+b)(b+c)(a+c) \ge 8abc$

Corrigé Soient a et b et c des nombres réels positifs. On a : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$

Donc : $\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$

Donc : $a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0$

C'est-à-dire : $a + b \ge 2\sqrt{ab}$.(1)

De même on a : $b + c \ge 2\sqrt{bc}$.(2)

De même on a : $a + c \ge 2\sqrt{ac}$.(3)

Par suite : $(1)\times(2)\times(3)$ donne :

$(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \ge 2\sqrt{bc}\times 2\times\sqrt{ab}\times 2\sqrt{ac}$

Donc : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \ge 8\sqrt{abbcac}$

C'est-à-dire : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \ge 8\sqrt{a^2b^2c^2}$

Donc : $(a+b)\times(b+c)\times(a+c) \ge 8|abc|$

Et puisque : $abc \ge 0$.

Alors : $(a+b)(b+c)(a+c) \ge 8abc$

Exercice54 : (***) Soit a, b, c trois nombres réels.

1) Démontrer que $a\times b \le \frac{a^2+b^2}{2}$

2) Démontrer que $ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2$

3) Démontrer que : $3ab + 3ac + 3bc \le (a+b+c)^2$

Corrigé :1) Il suffit de se rappeler que :

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$

Ceci donne immédiatement le résultat.

2) On applique trois fois la question précédente :

$a\times b \le \frac{a^2+b^2}{2}$ et $a\times c \le \frac{a^2+c^2}{2}$ et $b\times c \le \frac{b^2+c^2}{2}$

En sommant ces trois inégalités, on obtient bien l'inégalité demandée.

On développe $(a+b+c)^2$ en l'écrivant $\left((a+b)+c\right)^2$, puis en redéveloppant le carré.

On trouve : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

En utilisant le résultat de la question précédente, $ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2$, on obtient exactement le résultat demandé.

Exercice55 : (***) Montrer que lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres d'un nombre de deux chiffres, la valeur de ce nombre augmente ou diminue de 9 fois la différence de ces deux chiffres.

Corrigé : Soient x le chiffre des dizaines et y le chiffre des unités

Donc Le nombre initial est : 10x + y.

Le nombre renversé est : 10y + x.

Si : x > y, on écrit la différence des deux nombres ainsi :(10 x + y) - (10 y + x)

= 10x + y - 10y - x

= 9x - 9y = 9 (x - y)

Si : x<y, on a la différence : (10y + x) - (10x + y) = 9y - 9x= 9 (y - x)

Lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres d'un nombre, la valeur de ce nombre augmente bien ou diminue bien de 9 fois la différence des deux chiffres.