Exercices avec corrections sur Les polynômes

Types d'exercices :

Application directe du cours (*)
Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes
Et déterminer si c'est possible leurs degrés: $a \in \mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$

$R(x)=5|x^2|+4|x|-5$; $M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$

$N(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$; $O(x)=4$;

$E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$

$F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$.

Solution : $P(x)$ est un polynôme et $d^\circ P=3$

$Q(x)$ et $R(x)$ et $N(x)$ ne sont pas des polynômes

$M(x)$ Est un polynôme et $d^\circ M=4$

$O(x)$ Est un polynôme et $d^\circ O=0$

- $E(x)$ Est un polynôme

Si $a-1\neq 0$ c'est-à-dire: $a\neq 1$ alors $d^\circ E=4$
Si $a=1$ alors $d^\circ E=2$

- $F(x)=(x-3)^2-4(5+x^6)+9+5(4x^6+x^3)$

Equivalent à :

$F(x)=x^2-6x+9-20-4x^6+9+4x^6+2x^3$

Donc : $F(x)=2x^3+x^2-6x-2$

Par suite : $d^\circ F=3$

Exercice2 : (**) discuter suivant le paramètre m le degré du polynôme $P(x)$:

$P(x)=(m^2-4)x^3+(2m-4)x^2$.

Solution : $P(x)=(m^2-4)x^3+(2m-4)x$

$m^2-4=0$ Signifie que : $(m-2)(m+2)=0$

Signifie que : $m-2=0$ ou $m+2=0$
Signifie que : $m=2$ ou $m=-2$

- Si $m\neq 2$ et $m\neq -2$ alors : $m^2-4\neq 0$ et par suite : $d^\circ P=3$
- Si $m=2$ alors : le polynôme devient :

$P(x)=0x^3+0x=0$ c'est un polynôme nul

Et par suite : le polynôme n'a pas de degré

- Si $m=-2$ alors : le polynôme devient :

$P(x)=0x^3-8x=-8x$ et par suite : $d^\circ P=1$

Exercice3 : (**) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Solution : P de degré 2 donc : P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^2+bx+c$

On a $P(0)=5$ donc : $a\times 0^2+b\times 0+c=5$

Par suite : $c=5$

On a $P(1)=5$ donc $a\times 1^2+b\times 1+c=5$

C'est-à-dire : $a+b+c=5$ donc : $a+b+5=5$

Donc : $a+b=0$ ①

On a $P(-2)=3$ donc : $a\times(-2)^2+b\times(-2)+5=3$

C'est-à-dire : $4a-2b+5=3$.

Donc $4a-2b=-2$ ②

Donc : on a le système suivant : $\begin{cases}4a-2b=-2\\ a+b=0\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}4a-2b=-2\\ b=-a\end{cases}$ donc : $4a+2a=-2$

C'est-à-dire : $6a=-2$ et donc : $a=-\frac{1}{3}$ et $b=\frac{1}{3}$

Alors : $P(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+5$

Exercice4 : (*) Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$

et $R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Solution :

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (Q) = 3

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ deg (P) =3

Donc : $P(x)=Q(x)$

Car : deg (P) = deg (Q) et les coefficients de leurs termes de même Degré sont égaux

Mais $P(x) \neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux .

Exercice5 (**) **:** Soit les polynômes suivants :

$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7$

$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$

Déterminer a ; b ; c sachant que : $P = Q$

Solution : $P = Q$ si et seulement si $P(x) = Q(x)$ pout tout x

$Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$

$Q(x) = 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 3ax^3 - 3bx^2 - 3cx + ax^2 + bx + c$

$Q(x) = 2ax^4 + (2b - 3a)x^3 + (2c - 3b + a)x^2 + (b - 3c)x + c$

Donc : $\begin{cases} 2a = 12 \\ 2b - 3a = -36 \\ a - 3b + 2c = 47 \\ b - 3c = -30 \\ c = 7 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} a = 0 \\ b = -9 \\ c = 7 \end{cases}$

On vérifie que : $a - 3b + 2c = 47$ est vraie .

Donc : $Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(6x^2 - 9x + 7)$

Exercice6: (*) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants :

$P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$; $3P(x) - 2Q(x)$

1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$; $Q(x) = 3x^4 - x^3 + x$

2) $P(x) = x^5 - x^2 + 3$; $Q(x) = -x^5 + x^2 - 5$

II) Calculer $P(x) \times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer :

$\deg(P \times Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q)$.

1) $P(x) = x^2 - 1$; $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

2) $P(x) = x^4 - x^2 + 2$; $Q(x) = 3x + 2$

Solution : I)

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$; $Q(x) = 3x^4 - x^3 + x$

On a : $P(x) + Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1 + 3x^4 - x^3 + x$

Donc $P(x) + Q(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 1$

On a : $P(x) - Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1 - 3x^4 + x^3 - x$

$P(x) - Q(x) = -3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1$

$3P(x) - 2Q(x) = 3(x^3 + 2x^2 - 1) - 2(3x^4 - x^3 + x)$

$3P(x) - 2Q(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3 - 6x^4 + 2x^3 - 2x$

$3P(x) - 2Q(x) = -6x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 2x - 3$

$\deg(P) = 3$; $\deg(Q) = 4$; $\deg(P + Q) = 4$;

$\deg(P - Q) = 4$

I) 2) $P(x) = x^5 - x^2 + 3$; $Q(x) = -x^5 + x^2 - 5$

On a: $P(x) + Q(x) = x^5 - x^2 + 3 - x^5 + x^2 - 5 = -2$

$P(x) - Q(x) = x^5 - x^2 + 3 + x^5 - x^2 + 8 = 2x^5 - 2x^2 + 8$

$3P(x) - 2Q(x) = 3(x^5 - x^2 + 3) - 2(-x^5 + x^2 - 5)$

$3P(x) - 2Q(x) = 3x^5 - 3x^2 + 9 + 2x^5 - 2x^2 + 10$

$3P(x) - 2Q(x) = 5x^5 - 5x^2 + 19$

$\deg(P) = 5$; $\deg(Q) = 5$; $\deg(P + Q) = 0$;

$\deg(P - Q) = 5$

II) 1) On a $P(x) = x^2 - 1$; $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

$P(x) \times Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 3$

$(P(x))^2 = (x^2 - 1)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 \times 1 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$

2) $P(x) = x^4 - x^2 + 2$; $Q(x) = 3x + 2$

$P(x) \times Q(x) = (3x + 2)(x^4 - x^2 + 2) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4$

$(P(x))^2 = (x^4 - x^2 + 2)^2 = (x^4 - x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$

$(P(x))^2 = (x^4 - x^2 + 2)^2 = x^8 - 2x^6 + 5x^4 - 4x^2 + 4$

$\deg(P \times Q) = 5$ $\deg(P) = 4$; $\deg(Q) = 1$

Donc $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Et $\deg(P^2) = 2\deg(P)$.

Exercice7 : (**) Soient les nombres a et b et le polynôme $P(x) = ax^2 + bx$

Calculer a et b sachant que :

$P(2x) - 4P(x) = 6x + a + 2$

Solution : Nous avons :

$P(2x) - 4P(x) = a(2x)^2 + b(2x) - 4(ax^2 + bx)$

$P(2x) - 4P(x) = 4ax^2 + 2bx - 4ax^2 - 4bx = -2bx$

Donc : $-2bx = 6x + a + 2$

Equivalent à : $-2b = 6$ et $a + 2 = 0$

Equivalent à : $b = -3$ et $a = -2$

Exercice8 : (**) Soit le polynôme :

$P(x)=x^4+6x^3+15x^2+18x+9$

1) Calculer a et b sachant que :

$P(x)=(x^2+3x)^2+a(x^2+3x)+b$

2) Factoriser $P(x)$.

Solution : Nous avons : $(x^2+3x)^2=x^4+6x^3+9x^2$

Donc : $P(x)=x^4+6x^3+9x^2+ax^2+3ax+b$

Donc : $P(x)=x^4+6x^3+(9+a)x^2+3ax+b$

Cette égalité donne on comparant deux à deux les termes de mêmes degrés le système suivant :

$\begin{cases}9+a=15\\3a=18\\b=9\end{cases}$ Donc $\begin{cases}a=6\\b=9\end{cases}$

Donc : $P(x)=(x^2+3x)^2+6(x^2+3x)+9$

Equivalent à :

$P(x)=(x^2+3x)^2+2\times(x^2+3x)\times3+3^2$

Par suite : $P(x)=(x^2+3x+3)^2$

Exercice9 : (***) 1) Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que : $P(x+1)-P(x)=x$

2) En déduire la somme suivante :

$S_1=1+2+3+....+n$

3) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$P(x+1)-P(x)=x^2$

4) En déduire la somme suivante :

$S_2=1^2+2^2+3^2+....+n^2$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x)=ax^2+bx+c$ avec : $a\neq0$

$P(x+1)-P(x)=x$ Signifie :

$\left(a(x+1)^2+b(x+1)+c\right)-\left(ax^2+bx+c\right)=x$

Signifie : $ax^2+2ax+a+bx+b+c-ax^2-bx-c=x$

Signifie : $(2a-1)x+a+b=0$

Donc : $\begin{cases}2a-1=0\\a+b=0\end{cases}$ Donc : $a=\frac{1}{2}$

Par suite : $b=-\frac{1}{2}$

Donc : $P(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ avec : $c\in\mathbb{R}$

2) $S_1=1+2+3+....+n=$????

On remplace successivement x par :

0 ;1 ;2 ;… ; n-1 ; n

Dans : $P(x+1)-P(x)=x$ On obtient :

$P(0+1)-P(0)=0 \quad (1)$

$P(1+1)-P(1)=1 \quad (2)$

$P(2+1)-P(2)=2 \quad (3)$

…….

$P((n-1)+1)-P(n-1)=n-1 \quad (n-1)$

$P(n+1)-P(n)=n \quad (n)$

On fait la somme membre à membre les égalités :

$(1)+(2)+(3)+\ldots(n-1)+(n)$

On obtient : $P(n+1)-P(0)=1+2+3+\ldots n=S_1$

Donc : $S_1=P(n+1)-P(0)$

$S_1=\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)+c-\left(\frac{1}{2}0^2-\frac{1}{2}(n+1)+c\right)$

$S_1=\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1-1)=\frac{1}{2}n(n+1)$

3) P de degré 3

Donc P s'écrit sous la forme :

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec : $a\neq0$

$P(x+1)-P(x)=x$ Signifie

$\left(a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d\right)-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=x^2$

après les calculs on trouve :

$a=\frac{1}{3}$ et $b=-\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{6}$

Et par suite : $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$

avec : $d\in\mathbb{R}$

De la même façon on montre que :

$P(n+1)-P(0)=1^2+2^2+3^2+\ldots n^2=S_2$

Et on trouve :

$S_2=P(n+1)-P(0)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice10 : (*) Soit le polynôme :

$P(x)=3x^3-2x^2+x+2$

Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-1$ et vérifier que :

$P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+P(1)$

Solution :1) De la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-1$ nous obtenons alors :

$$\begin{array}{rr|l}
 & 3x^3-2x^2+x+2 & x-1 \\
- & 3x^3-3x^2 & \overline{3x^2+x+2} \\
\hline
 & \boxed{x^2+x+2} & \\
- & x^2-x & \\
\hline
 & 2x+2 & \\
- & 2x-2 & \\
\hline
 & 4 &
\end{array}$$

$P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+4$

Calculons : $P(1)$:

$P(1)=3\times1^3-2\times1^3+1+2=3-2+1+2=4$

Donc : $P(x)=(x-1)(3x^2+x+2)+P(1)$

Exercice11 : (***) Trouver le diviseur du polynôme $P(x)=5x^3+x^2+2$ Sachant que le quotient et le reste sont respectivement : $Q(x)=5x^2-19x+76$ et $R(x)=-299$

Solution : Soit $D(x)$ le diviseur de $P(x)$

Alors : $P(x)=D(x)\times Q(x)+R(x)$

Donc : $P(x)-R(x)=D(x)\times Q(x)$.

D'où : $D(x)=\dfrac{P(x)-R(x)}{Q(x)}=\dfrac{5x^3+x^2+304}{5x^2-19x+76}$

On utilisant la division euclidienne du polynôme $5x^3+x^2+304$ par $5x^2-19x+76$

On trouve : $D(x)=x+4$

Exercice12 : (***) On donne : $P(x)=-2x^3-4x^2+x-1$

Et $Q(x)=-2x^2-18x-125$ et $R(x)=-876$

Trouver le nombre réel a pour que $Q(x)$ et $R(x)$ soient respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-a$.

Solution : D'après la division euclidienne on a : $P(x)=(x-a)\times Q(x)+R(x)$

D'où :

$-2x^3-4x^2+x-1=(x-a)\times(-2x^2-18x-125)-876$

$=-2x^3-(18-2a)x^2-(125-18a)x+(125a-876)$

D'où : $\begin{cases}18-2a=4\\125-18a=-1\\125a-876=-1\end{cases}$ nous en déduisons : $a=7$

Exercice13 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Vérifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Factoriser $P(x)$

Solution :1) $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

Donc : 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) 1 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x-1$

En effectuant la division euclidienne de : $P(x)$ Par $x-1$:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\
- & x^3-x^2 & \overline{x^2-x-6} \\
\hline
 & -x^2-5x+6 & \\
- & -x^2+x & \\
\hline
 & -6x+6 & \\
- & -6x+6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

On trouve donc : $Q(x)=x^2-x-6$

Donc : $P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

Exercice14 : (**) Soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1) Calculer $P(-3)$ et que peut-on dire ?

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x+3)Q(x)$

Solution : 1) En remplaçons x par -3 dans le polynôme $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

On a :

$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)-6=-27+27+6-6=0$

Donc -3 est racine du polynôme $P(x)$

2) Donc : $P(x)$ est divisible par $x+3$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x+3)Q(x)$ et puisque le degré de $P(x)$ est 3

Donc : le degré de $Q(x)$ est 2

Par suite : $Q(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$

Methode1 : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

Donc : $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$

Donc : $a=1$ et $b+3a=3$ et $3c=-6$

Donc : $c=-2$ et $a=1$ et $b=0$

Donc : $Q(x)=x^2-2$

Methode2 : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$=x^2(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x^2-2)$

Donc : $Q(x)=x^2-2$

Methode3 : Effectuer la division euclidienne de $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$ par : $x+3$

Et alors on déterminer le quotient et le reste.

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\
- & x^3+3x^2 & \overline{x^2\quad -2} \\
\hline
 & -2x-6 & \\
- & -2x-6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc :

$P(x)=(x+3)Q(x)+P(-3)=(x+3)(x^2-2)+0=(x+3)(x^2-2)$

$Q(x)=x^2-2$ est le quotient et $P(-3)=0$ le reste

Exercice15 : (***) Déterminer le polynôme $P(x)$ sachant que ses racines sont 1 ; 2 ; 3 et que :

$P(4)=4$ et $\deg P=3$

Solution : Conformément aux données nous avons :

$P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$ Avec : $a\in\mathbb{R}$

Or $P(4)=4$ implique : $4=a(4-1)(4-2)(4-3)$

Donc : $4=6a$ d'où : $a=\frac{2}{3}$

Par conséquent : $P(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$

Donc : par développement on trouve :

$P(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+\frac{22}{3}x-4$

Exercice16 : (**) Soit :

$P(x)=x^4-3x^3-5x^2+13x+6$

Calculer : $P(-2)$ et $P(3)$ et factoriser $P(x)$.

Solution : On a $P(x)=x^4-3x^3-5x^2+13x+6$

$P(-2)=(-2)^4-3\times(-2)^3-5\times(-2)^2+13(-2)+6=0$

et $P(3)=(3)^4-3\times(3)^3-5\times(3)^2+13(3)+6=0$

Donc : $P(x)$ est divisible par $x+2$ et $x-3$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^4-3x^3-5x^2+13x+6 & x+2 \\
- & x^4+2x^3 & \overline{x^3-5x^2+5x+3} \\
\hline
 & -5x^3-5x^2+13x+6 & \\
- & -5x^3-10x^2 & \\
\hline
 & 5x^2+13x+6 & \\
- & 5x^2+10x & \\
\hline
 & 3x+6 & \\
- & 3x+6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Donc : $P(x)=(x+2)(x^3-5x^2+5x+3)$

Et $Q(x)=x^3-5x^2+5x+3$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x-3$

(Car : $P(3)=Q(3)=0$)

$$\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+5x+3 & x-3 \\
x^3+3x^2 & \overline{x^2-2x-1} \\
\hline
-2x^2+5x+3 & \\
2x^2-6x & \\
\hline
-x+3 & \\
x-3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Donc :

$x^3-5x^2+5x+3x+2=(x-3)(x^2-2x-1)$

Par suite : $P(x)=(x+2)(x-3)(x^2-2x-1)$

Exercice17 : (***) Déterminer le nombre réel a pour que : $P(x)=x^3-6x^2+(2+3a)x-2a$

Soit divisible par $x-3$ et factoriser $P(x)$ dans ce cas

Solution :1) $P(x)=x^3-6x^2+(2+3a)x-2a$

Est divisible par $x-3$ donc : $P(3)=0$

Donc : $3^3-6\times3^2+3(2+3a)-2a=0$

Donc : $7a=21$ par suite : $a=3$

Factorisation de $P(x)$ dans le cas : $a=3$

Donc : $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$P(x)$ divisible par $x-3$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3-6x^2+11x-6 & x-3 \\
\hline
- & x^3-3x^2 & x^2-3x+2 \\
\hline
 & -3x^2+11x-6 & \\
- & 3x^2+9x & \\
\hline
 & 2x-6 & \\
- & 2x+6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Donc : $P(x)=(x-3)(x^2-3x+2)$

Exercice18 : (**) Soit le polynôme :

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ et déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste

2) Montrer que $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en polynômes de 1ere degrés

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

Solution :1) La division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$:²

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\
\hline
 & x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\
\hline
 & -4x^2-5x+6 & \\
 & 4x^2+8x & \\
\hline
+ & 3x+6 & \\
 & -3x-6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Donne : $Q(x)=x^2-4x+3$ et le reste est : 0

2) $Q(3)=0$ donc 3 est racine du polynôme $Q(x)$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) On a : $P(x)=(x+2)\times(x^2-4x+3)$

En Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$

Par $x-3$ on aura : $Q(x)=(x-3)\times(x-1)$

Donc : $P(x)=(x+2)\times(x-3)\times(x-1)$

4) $P(x)=0$ ssi $(x+2)(x-3)(x-1)=0$

Signifie que : $x-1=0$ ou $x+2=0$ ou $x-3=0$

$P(x)=0$ Signifie que $x=1$ ou $x=-2$ ou

$x=3$ Donc : $S=\{-2;1;3\}$

Exercice19 : (***) Soit :

$P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ avec : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1) Déterminer a et b tels que :

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12.

2) Factoriser $P(x)$ dans ce cas.

Solution :1) $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$ donc : $P(2)=0$

Donc : $2\times2^3+3\times2^2+a\times2+b=0$

C'est-à-dire : $2a+b+28=0\ (1)$

b) Le reste de la division euclidienne de $P(x)$

Par $x-1$ est -12.

Donc : $P(1)=-12$ donc : $a-b+17=0\ (2)$

Donc le couple (a,b) est solution du système

suivant : $\begin{cases}2a+b+28=0\\ a-b+17=0\end{cases}$

On résolvant le système on trouve :

$a=-11$ et $b=-6$

Donc : $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$

2) Factorisation de $P(x)$ dans ce cas :

$P(x)$ est divisible par $x-2$.

Donc : $P(x)=(x-2)(2x^2+7x+3)$

Exercice20: (***) Soit : $P(x)=x^3-3x+2$

1)a)Calculer $P(1)$ et déterminer $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-1)Q(x)$

b) Vérifier que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$

2) Soit α un réel tel que : $1<\alpha<2$

Donner un encadrement de $\alpha+2$ et de $(\alpha-1)^2$

et en déduire que : $0<P(\alpha)<4$

Solution :1)a) $P(x)=x^3-3x+2$

$P(1)=1^3-3\times1+2=1-3+2=0$

Donc $P(x)$ soit divisible par $x-1$

Effectuons la division euclidienne de :

$P(x)$ Par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ -x^3+x^2 & \overline{x^2+x-2} \\ \hline x^2-3x+2 & \\ -x^2+x & \\ \hline -2x+2 & \\ 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc :

$P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b) Vérifions que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$?

$(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$

$=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2=x^2-4x+2=P(x)$

2) $1<\alpha<2$ Donc $3<\alpha+2<4$ (1)

C'est-à-dire : $0<\alpha-1<1$

Donc $0<(\alpha-1)^2<1$ (2)

De (1) et (2) on a alors : $0<(\alpha+2)(\alpha-1)^2<4$

Par suite : $0<P(\alpha)<4$.

Exercice21 : (***) Soit :

$P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1)Vérifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$

Alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) Vérifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$

Par $x-2$ trouver un polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-2)Q(x)$

5) En déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) Déterminer les réels a ; b ; c tel que :

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$

7) En déduire une factorisation du polynôme P en polynômes de 1ere degrés.

Solution :1) $P(0)=2\neq 0$

Donc 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2) α est racine du polynôme $P(x)$

Ssi $P(\alpha)=0$

Signifie: $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

On calcul $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=?$

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha^4}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)+14\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha^3}{\alpha^4}\right)+2\frac{\alpha^4}{\alpha^4}$

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2-9\alpha+14\alpha^2-9\alpha^3+2\alpha^4}{\alpha^4}$

Et puisque $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

Donc : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

Donc : $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$.

3)

$P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2=0$

Donc :2 est racine du polynôme $P(x)$

4) En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$ on trouve que :

$P(x)=(x-2)\times(2x^3-5x^2+4x-1)$

5) On a 2 est racine du polynôme $P(x)$

Donc : $\frac{1}{2}$ est aussi racine du polynôme $P(x)$

Donc : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et puisque $P(x)=(x-2)Q(x)$

Alors : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ or $\left(\frac{1}{2}-2\right)\neq 0$ donc : $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) En Effectuant la division euclidienne de $Q(x)$

Par $x-\frac{1}{2}$ on trouve : $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

Donc : $a=2$ et $b=-4$ et $c=2$

7) On a : $P(x)=(x-2)Q(x)$

Et $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

Donc : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-4x+2)$

On factorise aussi : $2x^2-4x+2$:

On remarque que 1 est racine

En Effectuant la division euclidienne de $2x^2-4x+2$ par $(x-1)$

On trouve : $2x^2-4x+2=(x-1)(2x-2)$

Finalement : $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)$

$$P(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$$

C'est-à-dire : $P(x)=(x-2)(2x-1)(x-1)^2$

Exercice22 : (***) Soit le polynôme suivant (E) :

$$P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$

1) Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que

$$P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

Soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1) Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$:

$$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$$

$$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$$

Donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$

3) a) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$:

$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$ On a $\Delta\succ 0$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1 \text{ car } \sqrt{2}-1\succ 0$$

$$x_2=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1 \text{ et } x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Donc : $S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

4) Recherche des solutions de l'équation :

$$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ Peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$$

On pose : $X=\sqrt{x}$

On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions

Sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ **et** $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

C'est à dire : $x_1=2$ et $x_2=1$ par suite: $S=\{2,1\}$

5) Recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$:

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ Signifie que : $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x=-1$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=1$

On a donc : $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

$P(x)\leq 0$ Signifie que :

$$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$

Exercice23: (***) Soit le polynôme suivant (E) :

$$P(x)=x^3-\sqrt{3}x^2-4x+4\sqrt{3}$$

1) Montrer que **-2** est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que :

$$P(x)=(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)$$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{3}-2\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation : $x-\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x}+2\sqrt{3}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Solution : 1)

$P(-2)=(-2)^3-\sqrt{3}(-2)^2-4(-2)+4\sqrt{3}$

$P(-2)=-8-4\sqrt{3}+8+4\sqrt{3}=0$ Donc : **-2** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)$

$=x^3-\left(\sqrt{3}+2\right)x^2+2\sqrt{3}x+2x^2-2\left(\sqrt{3}+2\right)x+4\sqrt{3}$

$=x^3-\sqrt{3}x^2-2x^2+2\sqrt{3}x+2x^2-2\sqrt{3}x-4x+4\sqrt{3}$

$=x^3-\sqrt{3}x^2-4x+4\sqrt{3}=P(x)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}$

$a=1$ et $b=-\left(\sqrt{3}+2\right)$ et $c=2\sqrt{3}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(\sqrt{3}+2\right)\right)^2-4\times2\sqrt{3}\times1=\left(\sqrt{3}+2\right)^2-8\sqrt{3}$

$\Delta=\sqrt{3}^2+2\times2\times\sqrt{3}+2^2-8\sqrt{3}=\sqrt{3}^2-4\sqrt{3}+2^2=\left(\sqrt{3}-2\right)^2$

b) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}$

Puisque : $\Delta\succ0$ donc il y'a deux racines :

$$x_1=\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}{2\times1}=\frac{\sqrt{3}+2+\left|\sqrt{3}-2\right|}{2\times1}$$

$$x_2=\frac{\sqrt{3}+2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}}{2\times1}=\frac{\sqrt{3}-2-\left|\sqrt{3}-2\right|}{2\times1}$$

Or on a: $2\succ\sqrt{3}$ car $(2)^2\succ\left(\sqrt{3}\right)^2$ Donc: $\sqrt{3}-2\prec0$

Par suite: $\left|\sqrt{3}-2\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\dfrac{\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}}{2\times1}=2$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{2\times1}=\sqrt{3}$

Par suite: $S=\left\{\sqrt{3},2\right\}$.

4) $x-\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x}+2\sqrt{3}=0$

Est équivalente à: $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{x}+2\sqrt{3}=0$.

On pose : $X=\sqrt{x}$

On a donc : $X^2-\left(\sqrt{3}+2\right)X+2\sqrt{3}=0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1=\sqrt{3}$ et $X_2=2$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=2$

Donc: $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(2)^2$

Qui Signifie que: $x_1=3$ et $x_2=4$ par suite: $S=\{3,4\}$

5) On a: $P(x)=(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)$

$P(x)=0$ Signifie $x+2=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}=0$

Signifie: $x_0=-2$ ou $x_1=\sqrt{3}$ ou $x_2=2$

Par suite: $S=\left\{-2,2,\sqrt{3}\right\}$

6) $P(x)\geq0$ Signifie: $(x+2)\left(x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+2\sqrt{3}\right)\geq0$

x	$-\infty$	-2		$\sqrt{3}$		2	$+\infty$
$Q(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S=\left[-2;\sqrt{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

Exercice24 : Soit le polynôme suivant (E) :

$P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation $x-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{5}(-1)^2-(-1)+\sqrt{5}$

$P(-1)=-1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}=0$

Donc : **-1** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)=x^3-\left(\sqrt{5}+1\right)x^2+\sqrt{5}x+x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$

$=x^3-\sqrt{5}x^2-x^2+\sqrt{5}x+x^2-\sqrt{5}x-x+\sqrt{5}$

$=x^3-\sqrt{5}x^2-x+\sqrt{5}=P(x)$

3)a) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$

$a=1$ et $b=-\left(\sqrt{5}+1\right)$ et $c=\sqrt{5}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2-4\times\sqrt{5}\times1=\left(\sqrt{5}+1\right)^2-4\sqrt{5}$

$\Delta=\sqrt{5}^2+2\times1\times\sqrt{5}+1^2-4\sqrt{5}=\sqrt{5}^2-2\sqrt{3}+1^2=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

3)b) $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}$ et $\Delta=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

Puisque : $\Delta\succ0$ donc il y'a deux racines :

$x_1=\dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{5}+1+\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times1}$

$x_2=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{2\times1}=\dfrac{\sqrt{5}+1-\left|\sqrt{5}-1\right|}{2\times1}$

Or on a: $\sqrt{5}\succ1$ car $\left(\sqrt{5}\right)^2\succ(1)^2$ Donc $\sqrt{5}-1\succ0$

par suite: $\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1$

Donc : $x_1=\dfrac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2\times1}=\sqrt{5}$ et $x_2=\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2\times1}=1$

par suite: $S=\left\{1,\sqrt{5}\right\}$

4) $x-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

Est équivalente à: $\sqrt{x}^2-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{5}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc :

$X^2-\left(\sqrt{5}+1\right)X+\sqrt{5}=0$

Mais d'après 3) b) on a : $X_1=\sqrt{5}$ et $X_2=1$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=\sqrt{5}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Qui Signifie que: $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$ et $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=1^2$

Qui Signifie que: $x_1=5$ et $x_2=1$ par suite: $S=\{1,5\}$

5) On a: $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)$

$P(x)=0$ Signifie $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}=0$

Signifie $x_0=-1$ ou $x_1=\sqrt{5}$ ou $x_2=1$

Par suite: $S=\left\{-1,1,\sqrt{5}\right\}$

6) $P(x)\geq0$ est équivalente à:

$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+\sqrt{5}\right)\geq0$

x	$-\infty$ -1 1 $\sqrt{5}$ $+\infty$
$Q(x)$	$+$ ǀ $+$ 0 $-$ 0 $+$
$x+1$	$-$ 0 $+$ ǀ $+$ ǀ $+$
$P(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Donc : $S=[-1;1]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right[$

Exercice25: (***) Soit le polynôme suivant (E) :

$P(x)=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$

1) Montrer que -1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que :

$P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation

$x-\left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq0$

Solution : 1) $P(x)=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}$

On a : $P(-1)=(-1)^3+\sqrt{3}(-1)^2-(-1)-\sqrt{3}$

$P(-1)=-1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=0$ Donc : **-1** est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+1)\left(x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}\right)$

$=x^3-\left(1-\sqrt{3}\right)x^2-\sqrt{3}x+x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$

$=x^3-x^2+\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x+x^2-x+\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

$=x^3+\sqrt{3}x^2-x-\sqrt{3}=P(x)$

3) a) $Q(x)=x^2-\left(1-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{3}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4\times\left(-\sqrt{3}\right)\times1=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$

$\Delta=1^2-2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+4\sqrt{3}=1^2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

b) $Q(x)=x^2-(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}$ puisque : $\Delta \succ 0$

Donc : il y'a deux racines :

$x_1=\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\times 1}=\frac{1-\sqrt{3}+|1+\sqrt{3}|}{2\times 1}$ et

$x_2=\frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\times 1}=\frac{1-\sqrt{3}-|1+\sqrt{3}|}{2\times 1}$

Or: $1+\sqrt{3}\succ 0$ Donc: $|1+\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}$

Donc: $x_1=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2\times 1}=1$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{2\times 1}=-\sqrt{3}$

Par suite: $S=\{-\sqrt{3},1\}$

4) $x-(1-\sqrt{3})\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

Est équivalente à: $(\sqrt{x})^2-(1-\sqrt{3})\sqrt{x}-\sqrt{3}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ on a donc : $X^2-(1-\sqrt{3})X-\sqrt{3}=0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1=-\sqrt{3}$ et $X_2=1$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=1$

Or $\sqrt{x_1}=-\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $(\sqrt{x_2})^2=1^2$

Qui Signifie que: $x_2=1$ par suite: $S=\{1\}$

5) $P(x)=(x+1)\left(x^2-(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+1=0$ ou $x^2-(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

Signifie: $x_0=-1$ ou $x_1=-\sqrt{3}$ ou $x_2=1$

Donc: $S=\{-1,1,-\sqrt{3}\}$

6) $P(x)\le 0$ Signifie que:

$(x+1)\left(x^2-(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}\right)\le 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		1	$+\infty$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S=\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup[-1;1]$

Exercice26 : (***) Soit le polynôme suivant:

$P(x)=x^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)x^2+(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})x-4\sqrt{6}$

1) Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrer que : $P(x)=(x+2)\left(x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}\right)$

3) On pose : $Q(x)=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$

et soit Δ son discriminant

a) vérifier que : $\Delta=14+4\sqrt{6}$ et compléter :

$14+4\sqrt{6}=(...+....)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) En déduire les solutions de l'équation :

$x+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\ge 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\le 0$

Solution : 1)

$P(-2)=(-2)^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)(-2)^2+(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})(-2)-4\sqrt{6}$

$P(-2)=-8+8\sqrt{3}-4\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}=0$

-2 est racine du polynôme $P(x)$

2) $(x+2)\left(x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}\right)=$

$=x^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x^2-2\sqrt{6}x+2x^2+2(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-4\sqrt{6}$

$=x^3+(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)x^2+(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6})x-4\sqrt{6}=P(x)$

3) a)On pose : $Q(x)=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$

Soit Δ son discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-4\times(-2\sqrt{6})\times 1$

$\Delta=(2\sqrt{3})^2-2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+8\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$=12+4\sqrt{6}+2=14+4\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$\Delta=12+4\sqrt{6}+2=(2\sqrt{3})^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$

Par suite : $\Delta=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

3)b) $Q(x)=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$

$\Delta=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

Puisque : $\Delta\succ 0$ donc il y'a deux racines :

$x_1=\frac{-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+|2\sqrt{3}+\sqrt{2}|}{2\times 1}$

$x_2=\frac{-(2\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-|2\sqrt{3}+\sqrt{2}|}{2\times 1}$

Or on a : $2\sqrt{3}+\sqrt{2}\succ 0$

Par suite: $\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Donc: $x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\sqrt{2}$

Et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=-2\sqrt{3}$

Par suite: $S=\left\{-2\sqrt{3},\sqrt{2}\right\}$

4) $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Est équivalente à: $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ et on a donc :

$X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

Mais d'après 3)b) on a : $X_1=-2\sqrt{3}$ et $X_2=\sqrt{2}$

Qui Signifie que: $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ et $\sqrt{x_2}=\sqrt{2}$

Or $\sqrt{x_1}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solution

Donc: $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ qui Signifie que: $x_2=2$

Par suite: $S=\{2\}$

5) $Q(x)\geq 0$ On a $x_1=\sqrt{2}$ et $x_2=-2\sqrt{3}$

Donc: le tableau de Signe est:

x	$+\infty$		$\sqrt{2}$		$-2\sqrt{3}$		$-\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		+	0	−	0	+	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

6) On a : $P(x)=(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)$

$P(x)=0$ Signifie: $x+2=0$ ou

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

Signifie: $x_0=-2$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=-2\sqrt{3}$

Donc: $S=\left\{-2,\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

7) $P(x)\leq 0$ Signifie: $(x+2)\left(x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\right)\leq 0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		+	0	+		−	0	+	
$x+2$		−	0	−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Donc : $S=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[-2;\sqrt{2}\right]$

Exercice27 : (**) Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1) montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) En Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$ montrer que : $P(x)=(x-3)Q(x)$

Avec : $Q(x)=2x^2+x-1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x)\geq 0$

5) En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\succ 0$

Solution :1) $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ On a

$P(3)=2\times 3^3-5\times 3^2-4\times 3+3=54-45-12+3=0$

Donc 3est racine du polynôme $P(x)$

Donc $P(x)$ est divisible par $x-3$

2) Effectuons la division euclidienne de $P(x)$

Par $x-3$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2-4x+3 & x-3 \\ \hline -2x^3+6x^2 \qquad\qquad & 2x^2+x-1 \\ \hline x^2-4x+3 & \\ -x^2+3x \quad & \\ \hline -x+3 & \\ x-3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On trouve : $P(x)=(x-3)Q(x)$ ①

Avec : $Q(x)=2x^2+x-1$

3) On a : $Q(x)=2x^2+x-1$ et $Q(x)=0$

$\Delta=1^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9$

Donc : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times 2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times 2}=\dfrac{1}{2}$

Par suite: $S=\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$

4) $Q(x)\geq 0$ On a $x_1=-1$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$ sont racines

Du polynôme $Q(x)$ Donc: le tableau de Signe:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		+	0	−	0	+	

Donc: $S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

5) Cherchons une factorisation du polynôme $P(x)$ on produits de polynômes de 1ere degrés:

On a : $P(x)=(x-3)Q(x)$ avec $Q(x)=2x^2+x-1$

Et les racines du polynôme $Q(x)$ sont :

$x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ Donc : une factorisation de $Q(x)$

est : $Q(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)$

Donc : $Q(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = (2x-1)(x+1)$

Par suite : $P(x) = (x-3)(2x-1)(x+1)$

6) On a : $P(x) = (x-3)(2x-1)(x+1)$

$P(x) = 0$ Signifie : $(x-3)(2x-1)(x+1) = 0$

Signifie : $x-3=0$ ou $2x-1=0$ ou $x+1=0$

Signifie : $x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-1$

Par suite : $S = \mathbb{R} - \left\{-3, -1, \frac{1}{2}\right\}$

7) $P(x) \succ 0$ Signifie: $(x-3)Q(x) \succ 0$:

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S = \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]3; +\infty\right[$