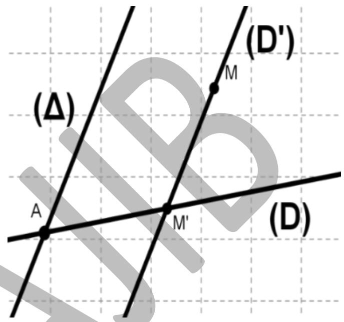
Résumé de Cours : La projection

Résumé de Cours

1) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite

a) Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A, et soit M un point du plan ; la droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'



Le point M's'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ) ou l'image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

La droite (Δ) s'appelle la direction de la projection.

$P(M) = M'$ **:** M' L'image du point M par la projection P

si $B \in (D)$ alors $P(B) = B$ on dit alors que le point B est invariant par la projection P

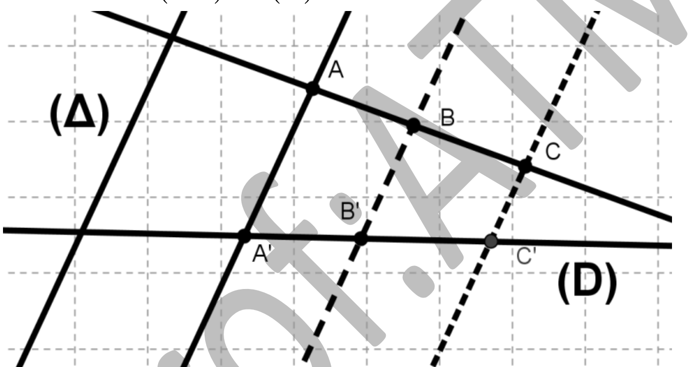
2) Propriétés :

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est globalement invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)
- L'image du segment [AB] par la projection P est le segment *[A'B']* et on écrit : $P([AB]) = [A'B']$
- La projection conserve les milieux

Remarque : Si les droite (D) et (Δ) sont perpendiculaires

On dit que M'est la projection orthogonale de M sur (D)

3) Théorème de Thales : Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point et soient A ; B ; C trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles



Soient A' ; B' ; C' et D' respectivement les projetés des points A ; B; C et D sur (D) parallèlement à (Δ)

a) Alors : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$

b) Si : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

La projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

c) Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

La projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

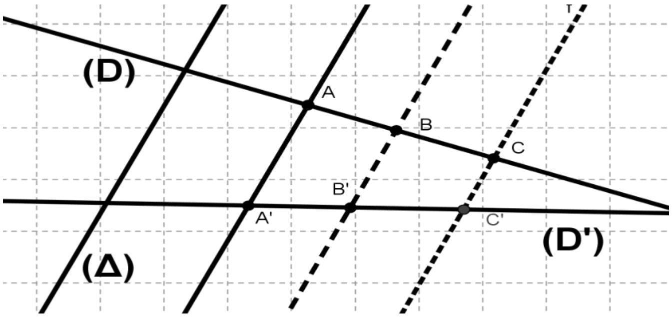
4) Le théorème réciproque de Thalès : Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à une troisième (Δ)

Soients A ; B deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points A ; B sur (D') parallèlement à (Δ).

Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points A ; B et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points A' ; B' et C' sur la droite (D')

Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a $(AA')\parallel(BB')\parallel(CC')$



Méthodes et astuces et remarques et conseils

Méthodes 1 : Comment faire pour montrer que deux droites parallèles.
Pour montrer que deux droites sont parallèles on peut utiliser : la réciproque du théorème de Thalès

Méthodes 2 : Comment faire pour montrer que le point I' est milieu du segment $[A'B']$
Si je peux montrer que: A' et B' et I' sont les projections respectives de A et B et I sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) et I milieu du segment $[AB]$; alors je peux en déduire que I' est le milieu du segment $[AB]$ car la projection conserve le milieu.

Méthodes 3 : Comment faire pour montrer que $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$?
Si A' ; B', C' et D' sont les projections respectives de A ; B ; C et D sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) et on a : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ alors je peux en déduire que : $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Méthodes 4 : Comment faire pour montrer que trois points : A' et B' et C' sont alignés?
Si A' ; B' et C' sont les projections respectives de A ; B et C sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) et les points : A ; B et C sont alignés alors je peux en déduire que : A' et B' et C'sont alignés car la projection conserve l'alignement des points.

Méthodes 5 : Théorème de Thales réciproque version vectorielle.
Si (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan, A ; B et C trois points sur (L) tels que $A \neq B$ et $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ si A' et B' sont les projections respectives de A et B sur une droite (D) et $\overrightarrow{A'C'}=k\overrightarrow{A'B'}$ alors C' est la projection de C sur la droite (D) parallèlement à (Δ).

Remarque : La projection et la distance
Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes du plan, la projection sur la (D) parallèlement à la (Δ) ne conserve pas la distance.
Autrement dit si A' et B' sont les projections respectives de A et B alors $A'B'$ n'est pas
Nécessairement égale à AB.

Thalès de Milet, appelé communément (**Thalès**), est un philosophe et savant grec

Né à Milet vers -625 et mort vers -547 dans cette même ville.

C'est l'un des Sept sages de la Grèce antique et le fondateur présumé de l'école milésienne.

On lui attribue de nombreux exploits, comme le calcul de la hauteur de la grande pyramide ou la prédiction d'une éclipse, ainsi que le théorème de Thalès. Il fut l'auteur de nombreuses recherches mathématiques notamment en géométrie

Thalès

Exercices avec corrections sur la projection

Types d'exercices :
Application directe du cours (*)   Difficulté moyenne (**)   Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) Soit ABC un triangle et M le Milieu de [AB]

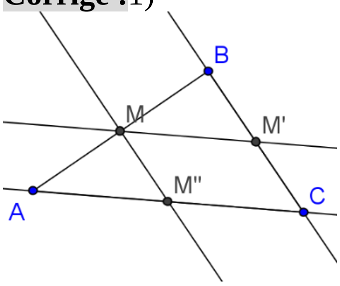
1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

Déterminer : $P_1(A)$; $P_1(C)$, $P_1(M)$, $P_1(B)$

2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminer : $P_2(A)$, $P_2(B)$,$P_2(C)$, $P_2(M)$

Corrigé :1)



Soit P_1 la projection sur(BC)parallèlement à (AC)

On a $A\in(AC)$ et $(AC)\cap(BC)=\{C\}$

Donc : $P_1(A)=C$

On a $B\in(BC)$ donc B est invariante par la projection P_1 donc $P_1(B)=B$

On a $C\in(BC)$ donc C est invariante par la projection P_1 donc $P_1(C)=C$

Soit $M'=P_1(M)$ on a **:** M le milieu de [AB]

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de [BC]
Donc : M' est le milieu de [BC] .

2) Soit : P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A\in(AC)$ Donc $P_2(A)=A$

On a $C\in(AC)$donc C est invariante par la projection P_2 donc $P_2(C)=C$

On a $B\in(BC)$ et $(AC)\cap(BC)=\{C\}$

Donc : $P_2(B)=C$.

On a M le milieu de [AB] donc la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu.

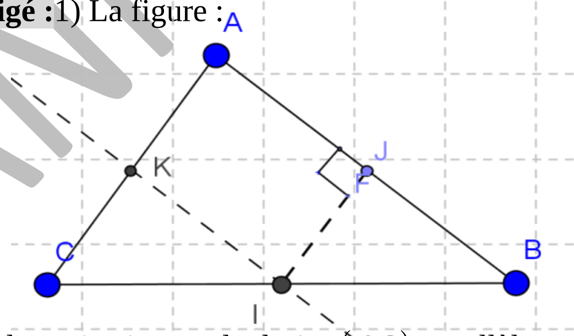
Soit : M'' **ce** milieu donc $P_2(M)=M''$

Exercice2 : (*) Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.
Le point I est le milieu du segment [BC]
Le point J est la projection orthogonale de I sur la droite (AB) .

Le point K est la projection de I sur la droite(AC) parallèlement à (AB)

1) Faire une figure
2) Déterminer l'image du segment [BC] par la projection sur la droite (AC) parallèlement à (AB)
3) Déterminer le milieu du segment [AC]

Corrigé :1) La figure :



2)Par la projection sur la droite (AC) parallèlement à (AB) on a : l'image de B est A
et l'image de C est C
Donc : l'image du segment [BC] est le segment [AC]
3)Déterminons le milieu du segment AC] :
Le point I est milieu du segment [BC] donc son image qui est K est aussi le milieu de l'image de [BC] qui est [AC]
Donc : le milieu du segment [AC] est le point K car la projection conserve le milieu.

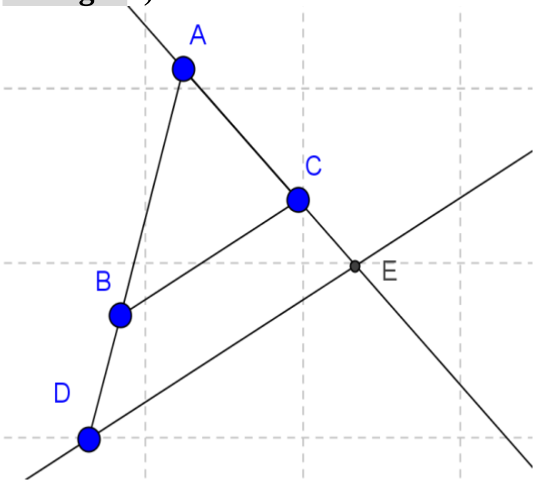
Exercice3 : (**) Soient ABC un triangle et D un point définie par : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure
2) La droite parallèle à (BC) passant par D coupe (AC)en E

a) Déterminer DE en fonction BC

b) Montrer que : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Corrigé : 1)



2)a) On a : A et B et D sont des points alignés et les points A et C et E sont des points alignés dans cet ordre et $(DE)\parallel(BC)$

Nous pouvons appliquer le théorème de Thalès :

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

Or on a : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AD=\frac{3}{2}AB$: donc : $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{2}$ et par suite :

$\frac{DE}{BC}=\frac{3}{2}$ qui signifie que : $\boxed{DE=\frac{3}{2}BC}$

b) On a : $DE=\frac{3}{2}BC$ et les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et ont le même sens

Donc : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

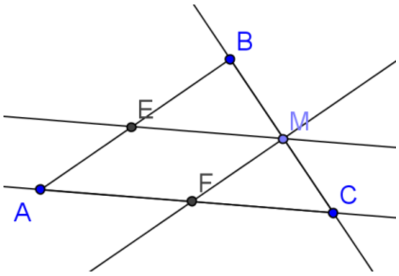
Et on a : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{2}$ donc : $AE=\frac{3}{2}AC$

Et puisque $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ont le même sens Alors : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice4 : (***) Soient ABC un triangle et $M\in[BC]$ et E la projection du point M sur la droite (AB) parallèlement à (AC) et F la projection du point M sur la droite (AC) parallèlement à (AB)

1)Comparer : $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{CM}{CB}$ et comparer : $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{BM}{BC}$ 2) Déterminer la position du point M sur $[BC]$ tel que : $(BC)\parallel(EF)$.

Corrigé : 1)



Dans le triangle :ABC on a : $E\in[AB]$ et $M\in[BC]$ et on a : $(EM)\parallel(AC)$

D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AE}{AB}=\frac{CM}{CB}$ (1)

Dans le triangle :ABC on a : $F\in[AC]$ et $M\in[BC]$ et on a : $(MF)\parallel(AB)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AF}{AC}=\frac{BM}{BC}$ (2)

2) Dans le triangle :ABC on a : $E\in[AB]$ et $F\in[AC]$ et on a : $(BC)\parallel(EF)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

De (1) et (2) en déduit que : $\frac{CM}{CB}=\frac{BM}{BC}$

Donc : $CM=BM$ et puisque $M\in[BC]$

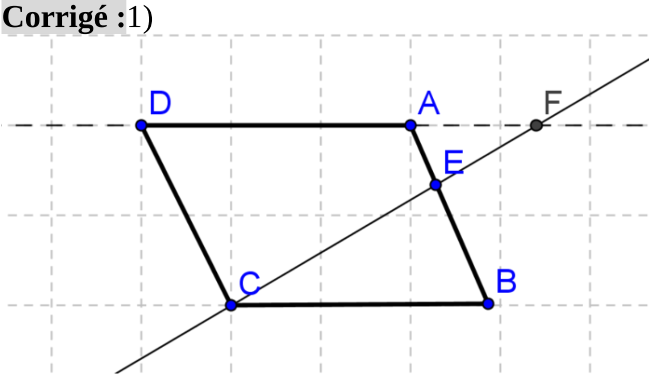
Alors : M est le milieu du segment $[BC]$

Exercice5: (***) ABCD Un parallélogramme et (Δ) une droite qui passe par le point C et coupe le segment $[AB]$ en E et la droite (AD) en F

1) Comparer : $\frac{AD}{AF}$ et $\frac{BE}{AE}$

2) En déduire que : $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=1$

Corrigé : 1)



Dans le triangle :FDC on a : F et A et D des points alignés et les points F et E et C alignés dans cette ordre et $(AE)\parallel(DC)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FE}=\frac{DC}{AE}$

On a aussi: A et E et B des points alignés et les points F et E et C alignés dans cette ordre et $(AF)\|(BC)$ donc d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{EB}{EA}=\frac{EC}{EF}=\frac{BC}{AF}$ Donc: $\frac{EB}{EA}=\frac{EC}{EF}(1)$

Et on a : $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FE}$ donc: $\frac{FA+AD}{FA}=\frac{EF+EC}{FE}$

Donc: $1+\frac{AD}{FA}=1+\frac{EC}{FE}$ et par suite : $\frac{AD}{FA}=\frac{EC}{FE}(2)$

De (1) et (2) en déduit que : $\frac{EB}{EA}=\frac{AD}{AF}$

2) On a : $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AE}-\frac{EB}{AE}=\frac{AB-EB}{AE}=\frac{AE}{AE}=1$

Donc: $\frac{AB}{AE}-\frac{AD}{AF}=1$

Exercice6 : (***) Soient ABC un triangle et M
Un point défini par : $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AM}$

2) Soit le point M' le projeté de M sur la droite (AB) parallèlement à (AC)

1) Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

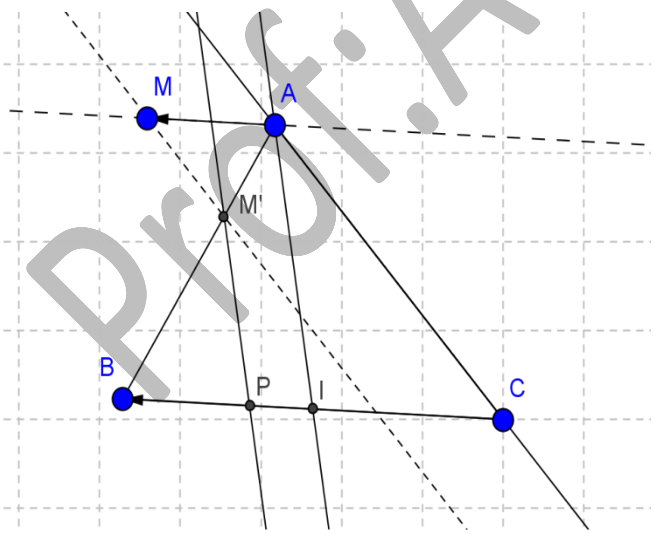
Et en déduire que $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et P le point tel que : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

a) Montrer que $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

b) En déduire que $(AI)\|(PM')$.

Corrigé : 1) La figure



$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AM}$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Soit: P la projection sur (AB) parallèlement à (AC).

On a $A\in(AB)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$.

On a $B\in(AB)$ donc B est invariante par la projection P donc $P(B)=B$.

On a aussi : $P(C)=A$ et $P(M)=M'$

Et puisque $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2) a) On a I le milieu du segment $[BC]$.

Équivaut à : $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{CB}$ et on a : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times2\overrightarrow{IB}$

Donc : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

b) On a : $\overrightarrow{IP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ donc : $IP=\frac{1}{3}IB$

Équivaut à : $\frac{IP}{IB}=\frac{1}{3}$ (1)

De même on a : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $AM'=\frac{1}{3}AB$

Équivaut à : $\frac{AM'}{AB}=\frac{1}{3}$ (2)

De : 1 et 2 on a $\frac{IP}{IB}=\frac{AM'}{AB}$ et d'après le théorème de Thalès réciproque on a Donc : $(AI)\|(PM')$

Exercice7 : (***) Soient ABC un triangle et I et I' deux points tel que :

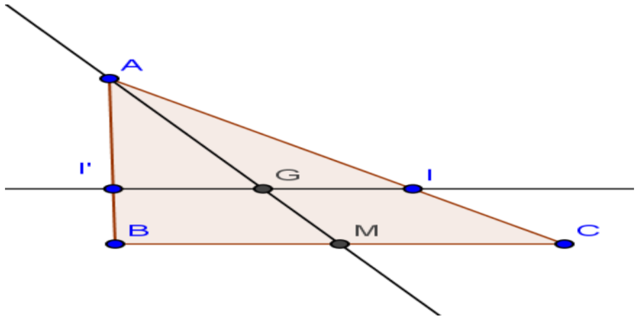
$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) Soit M est le milieu de [BC] ; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Corrigé :1)



On a $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$

C'est-à-dire : $AI=\frac{2}{3}AC$ donc $\frac{AI}{AC}=\frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{AI'}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$

C'est-à-dire : $AI'=\frac{2}{3}AB$ par suite : $\frac{AI'}{AB}=\frac{2}{3}$ ②

D'après ①et② on a $\frac{AI}{AC}=\frac{AI'}{AB}$

et d'après la réciproque de Thales : $(II')\parallel(BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I'

Donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

et M est le milieu de [BC]

Montrons que : : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM)

Parallèlement à (BC)

On a $A\in(AM)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A)=A$ ❶

La parallèle à (BC) passant par C est BC) elle coupe (AM) en M donc : $P(C)=M$ ❷

La parallèle à (BC) passant par I est-elle coupe (AM) en G donc $P(I)=G$ ❸

Et on a en plus $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹donc D'après :

❶ et ❷ et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Car la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points.

Exercice8 : (**) Soient ABC un triangle et I le milieu de : $[AC]$. E Un point de (AC) tel que : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$

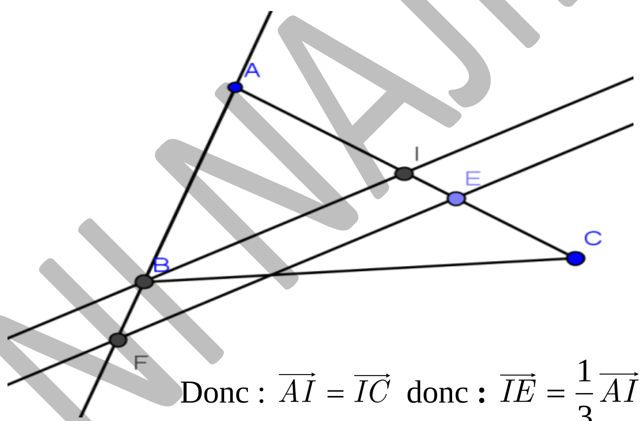
et $P_{((AB);(IB))}(E)=F$

Avec : $P_{((AB);(IB))}$ la projection sur (AB)

Parallèlement à (IB)

Faire une figure et Montrer que : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Corrigé : On a : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ **et** I le milieu de $[AC]$



Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$ donc **:** $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E)=F$ **et** $P_{((AB);(IB))}(I)=B$

Et $P_{((AB);(IB))}(A)=A$

Et puisque le la projection conserve le coefficient

D'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

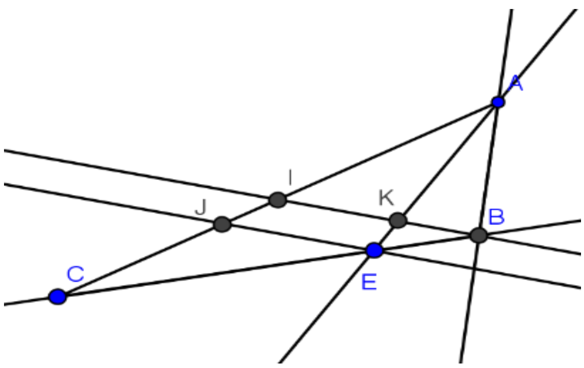
Exercice9 : (***) Soient ABC est un triangle et I le milieu de $[AC]$ et E un point tel que : $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle a (IB) coupe (AC) **en** J

1) Montrer que $\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que : $\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{IJ}$

2) Si $(IB)\cap(AE)=\{K\}$ Montrer que : $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{KE}$

Corrigé :1)



Soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur (AC) parallèlement à (IB)

On a : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B) = I$

Et : $P_{((AC);(IB))}(E) = J$ et $P_{((AC);(IB))}(C) = C$

Et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$

La déduction :

On a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de $[AC]$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et par suite :

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 5\overrightarrow{IJ}$

2) Soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur (AE)

Parallèlement à (IB) **:**

On a : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$ **et** $P_{((AE);(IB))}(A) = A$ et $P_{((AE);(IB))}(I) = K$

et $P_{((AE);(IB))}(J) = E$

Et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

Exercice10 : (***)

Soit ABCD un Parallélogramme de centre O

1) Soit A' la projection de A sur (DC) parallèlement à (DB)

a) Faire une figure

b) Montrer que $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

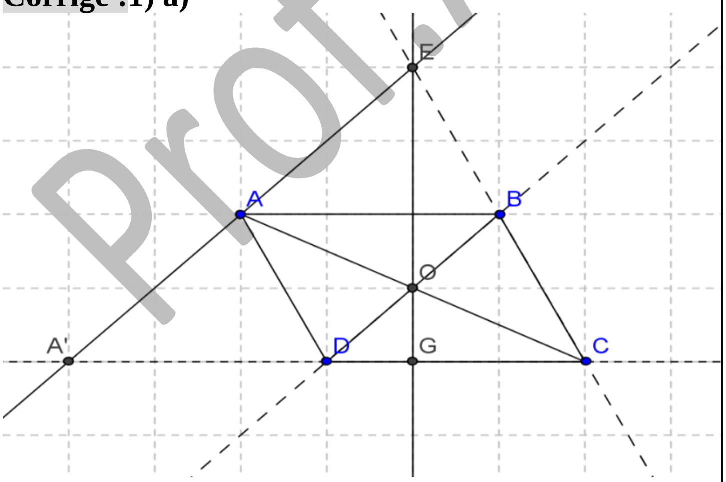
2) Soit E un point de la droite (BC) tel que :

A' est sa projection sur (DC) parallèlement à (DB)

Montrer que A est le milieu de $[A'E]$

3) Soit G le point d'intersection des droites (OE) et (DC) **;** Montrer que : $\overrightarrow{EO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$

Corrigé :1) a)



1)b) A' la projection s de A sur (DC) parallèlement à (DB) équivaut à: $A' \in (DC)$ et que : $(AA') \parallel (DB)$

Et on sait que : $(AB) \parallel (DA') = (DC)$

Donc le quadrilatère $(ABDA')$ est un parallélogramme. Et par suite : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'D}$

Or $(ABCD)$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Et par suite : $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

2) A' la projection de E sur (DC) parallèlement à (DB) équivaut à : $A' \in (DC)$ et que $(EA') \parallel (DB)$

Et d'après le théorème de Thalès dans le triangle (ECA') on a : $\frac{CD}{CA'} = \frac{CB}{CE} = \frac{BD}{A'E}$

Or on sait que : $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{DC}$

Équivaut à : D le milieu du segment : $[A'C]$

Et par suite : $\frac{CD}{CA'} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{BD}{A'E} = \frac{1}{2}$

Équivaut à dire que : $A'E = 2BD$

Et puisque on sait que : $(ABDA')$ est un parallélogramme donc : $AA' = BD$ et par suite : $A'E = 2AA'$

Et on a les points : A et A' et E sont alignés

Par conséquent : A est le milieu de $[A'E]$

3) G le point d'intersection des droites (OE) et (DC)

Dans le triangle : GEA' on a : $(DO) \parallel (A'A)$

Donc d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{GO}{GE} = \frac{GD}{GA'} = \frac{OD}{EA'}$ (2)

Or on sait que : $OD = \frac{1}{2}BD$ et que : $A'E = 2BD$

Donc : $OD = \frac{1}{4}EA'$ et par suite : $\frac{GO}{GE} = \frac{1}{4}$

Équivaut à dire que : $GE = 4BO$

Équivaut à : $\overrightarrow{GE} = 4\overrightarrow{GO}$

Donc : $\overrightarrow{GE} = 4\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EO}\right)$

Donc : $\overrightarrow{GE} = 4\overrightarrow{GE} + 4\overrightarrow{EO}$ équivaut à :

$\overrightarrow{GE} - 4\overrightarrow{GE} = 4\overrightarrow{EO}$

Équivaut à : $-3\overrightarrow{GE} = 4\overrightarrow{EO}$

Équivaut à : $-\frac{3}{4}\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EO}$

Et par suite : $\overrightarrow{EO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$

Exercice11 : (***) Soient ABC un triangle et M et N et D des points tels que :

$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}$ et $4\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et que : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3) Montrer que : les points A et C et N sont alignés.

4) On considère un point E du segment $[AB]$

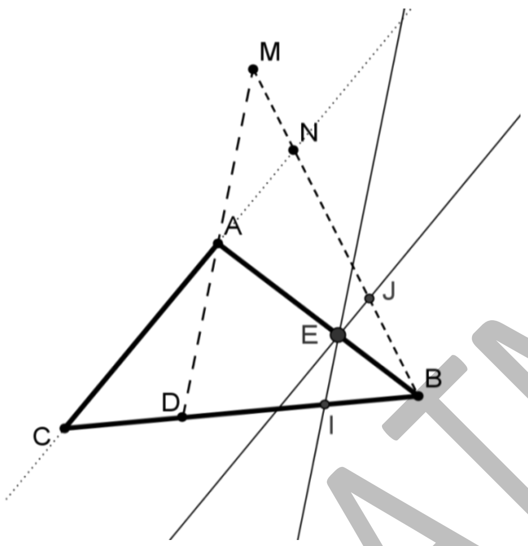
Tel que : $E\neq A$ et $E\neq B$.

Et soit le point I le projeté de E sur la droite (BD) parallèlement à (AD).

Et soit le point J le projeté de E sur la droite (BN) parallèlement à (AN).

Montrer que : $(DN)\parallel(IJ)$

Corrigé : 1) La figure.



$4\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}$

2) a) Montrons que : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}$ Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+2\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

(Car : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$)

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Par suite : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Montrons que : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On a : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MB}$ donc : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ Et par suite : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrons que les points A et C et N sont alignés ?

On a : $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{NA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ par suite : les points A et C et N sont alignés

4) Montrer que : $(DN)\parallel(IJ)$

- Dans le triangle ABN on a : $(EJ)\parallel(AN)$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{BE}{BA}=\frac{BJ}{BN}$ (1)
- Dans le triangle ABD on a : $(EI)\parallel(AD)$ donc d'après le théorème de Thalès on a: $\frac{BE}{BA}=\frac{BI}{BD}$ (2)

De : (1) et (2) en déduit que : $\frac{BI}{BD}=\frac{BJ}{BN}$ et puisque les points B et J et N et les points B et I et D sont dans le même ordre alors d'après le théorème de Thalès réciproque on a donc : $(DN)\parallel(IJ)$.

Exercice12 : bon interro(***) Soient ABCD un Parallélogramme de centre O et soit E un point tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **et** soit E' la projection de E sur (BC) parallèlement à (AB) et soit O' la projection de O sur (BC) parallèlement à (AB)

1) a) Faire une figure

b) Montrer que : O' est le milieu de $[BC]$

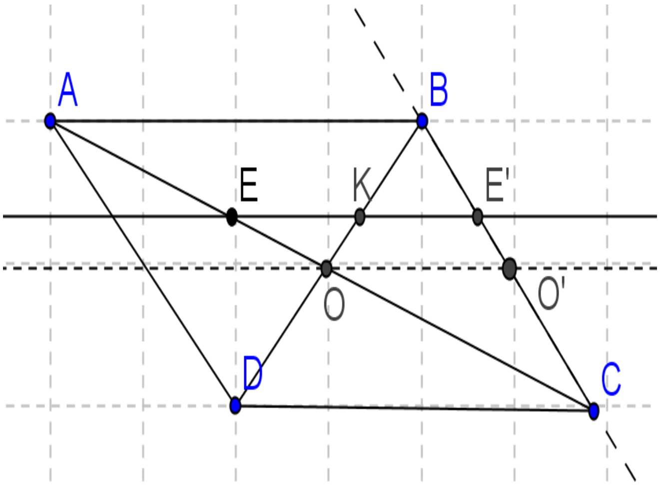
2) Montrer que : $\overrightarrow{BE'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et que : $\overrightarrow{EE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{O'E'}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

4) La droite (EE') coupe (BD) en K

Montrer que : $\overrightarrow{BD}=-6\overrightarrow{OK}$

Corrigé :1) a) La figure



b) Montrons que : O' est le milieu de $\left[BC\right]$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB) ; On a : la projection du point A est B

La projection du point O est O'

La projection du point C est C

Et puisque O est le milieu de $\left[AC\right]$ alors : O' est le milieu de $\left[BC\right]$ car la projection conserve le milieu

2)a) Montrons que : $\overrightarrow{BE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point A est B

La projection du point E est E'

La projection du point C est C

Et puisque on a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors : $\overrightarrow{BE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

b) On a : $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE'}$

Donc :

$$\overrightarrow{EE'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$

Donc : $\overrightarrow{EE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Par suite : $\overrightarrow{EE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$

Donc : $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ par suite : $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

On considère la projection sur (BC) parallèlement à (AB) On a : la projection du point A est B

La projection du point O est O'

La projection du point E est E'

Donc : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O'B}$ car la projection conserve le coefficient de colinéarité

Et puisque : O' est le milieu de $\left[BC\right]$ alors :

$\overrightarrow{O'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ Par suite : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

4) Montrons que : $\overrightarrow{BD} = -6\overrightarrow{OK}$

On considère la projection sur (BO) parallèlement à (AB)

On a : la projection du point O' est O

La projection du point E' est K

La projection du point B est B

Et puisque : $\overrightarrow{O'E'} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ et la projection conserve le coefficient de colinéarité

Alors : $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DB}$ et par suite : $\overrightarrow{DB} = 6\overrightarrow{OK}$

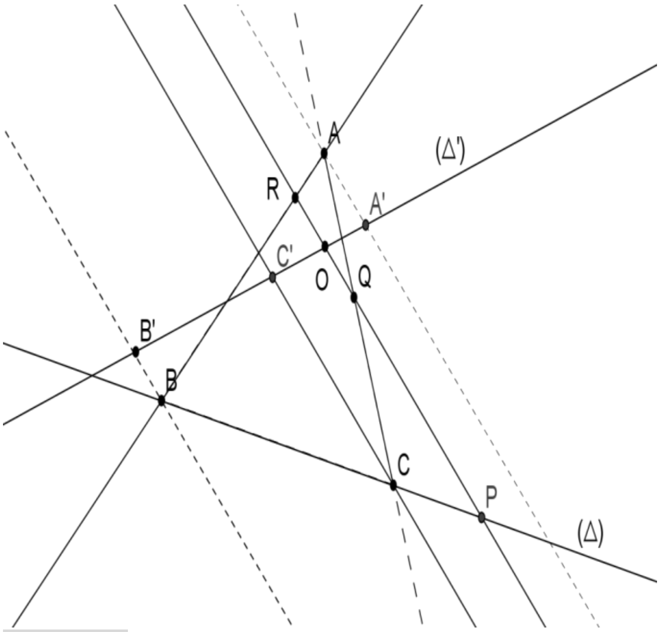
Et par conséquent : $\overrightarrow{BD} = -6\overrightarrow{OK}$

Exercice13 : Thalès (***) Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle et (Δ) la droite qui coupe : (BC) ; (CA) et (AB) respectivement en P ; Q et R

Et (Δ') la droite qui coupe (Δ) en O .

A' ; B' et C' sont respectivement les projections des points P ; Q et R sur (Δ') parallèlement (Δ)

Montrer que $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$



Corrigé :1)a) On considère la projection sur (Δ') parallèlement (Δ)

a) On a : la projection du point P est O

La projection du point C est C'

La projection du point B est B'

D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{PB}{PC}=\frac{OB'}{OC'}$ (1)

b) On a aussi : la projection du point Q est O

La projection du point C est C'

La projection du point A est A'

D'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{QC}{QA}=\frac{OC'}{OA'}$ (2)

c) On a aussi : la projection du point R est O

La projection du point B est B'

La projection du point A est A'

D'après le théorème de Thalès On a : $\frac{RA}{RB}=\frac{OA'}{OB'}$ (3)

De : (1) et (2) et (3) en déduit que :

$$\frac{PB}{PC}\times\frac{QC}{QA}\times\frac{RA}{RB}=\frac{OB'}{OC'}\times\frac{OC'}{OA'}\times\frac{OA'}{OB'}=1$$

Exercice14 : (***) Soient ABC un triangle isocèle en A et $M\in[BC]$ tel que : $M\neq B$ et $M\neq C$

La droite parallèle à (AB) passant par M coupe $[AC]$ en E et la droite parallèle à (AC) passant par M coupe $[AB]$ en F

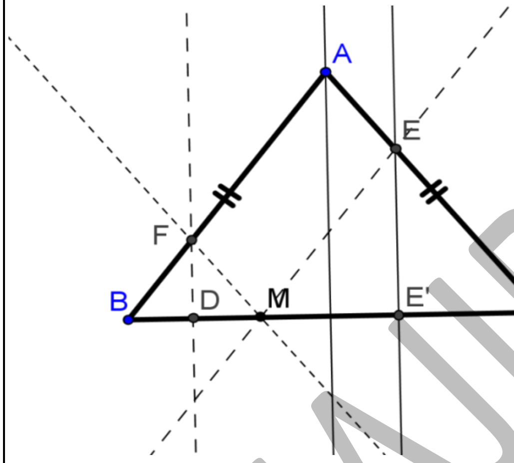
1) Montrer que les triangles MBF et MCE sont isocèles

2) Soient A' ; E' et F' respectivement les projections orthogonales des points A ; E et F sur (BC)

Montrer que : $MF'=A'E'$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

Corrigé :1)



Montrons que les triangles MBF et MCE sont isocèles

- On a : $(FM)\parallel(AC)$ donc : $BCA\equiv BMF$ (1)

Et on a : ABC un triangle isocèle en A

Donc : $CBA\equiv BCA$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $CBA\equiv BMF$

Par suite : le triangle MBF est isocèle en F

- On a : $(EM)\parallel(AB)$ donc : $FBC\equiv EMC$ (1)

Et puisque : $FBC\equiv MCE$ (2) alors :

$MCE\equiv EMC$

Par suite : le triangle MCE est isocèle en E

2) Montrons que : $MF'=A'E'$

Soit P la projection orthogonale sur (BC)

On a :

$P(M)=M$ et $P(A)=A'$ et $P(F)=F'$ et $P(E)=E'$

Et on a : $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EA}$ car $AEMF$ un parallélogramme

Et puisque la projection conserve le coefficient de colinéarité alors : $\overrightarrow{MF'}=\overrightarrow{E'A'}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

On a : $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EA}$

(Car $AEMF$ un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EA}$

C'est-à-dire : $-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AE}$

Et par suite : $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AF}=\vec{0}$