Exercices avec corrections sur l’ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Types d'exercices :
Application directe du cours (*)
Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) Les nombres $\frac{54}{40}, \frac{126}{450}, \frac{75}{90}, \frac{17}{7}, \frac{1}{3}$

Sont-ils des décimaux ?

Corrigé : $\frac{54}{40} = 1.35 = \frac{135}{10^2} \in \mathbb{D}$;

$\frac{126}{450} = 0.28 = \frac{28}{10^2} \in \mathbb{D}$

$\frac{75}{90} = \frac{5}{6} = 0.8333333333... \notin \mathbb{D}$

$\frac{17}{7} = 0.428571429... \notin \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} = 0.333333.......$ est rationnel mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Remarque : Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie :
2.428571428571428571428571428571… ; 428571 se répète.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ont dit que : $\sqrt{2}$ est un irrationnel

Un irrationnel a une écriture décimale non périodique infinie :

Exemple : 1.4142135623730950488016887242…

Exercice2 : (*) Compléter les expressions suivantes à l’aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$6...\mathbb{Z}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{Q}$; $\sqrt{2}...\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}....\mathbb{R}$; $\mathbb{N}....\mathbb{Q}$; $-\frac{2}{3}....\mathbb{R}^+$; $\frac{2}{3}....\mathbb{N}$

$\frac{6}{3}....\mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{100}}{5}....\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}....\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}^+....\mathbb{Z}$; $0....\mathbb{R}^*$;

$\frac{\sqrt{16}}{3}...\mathbb{Q}$; $-\sqrt{2}...\mathbb{R}^-$; $\frac{-7}{3}...\mathbb{Q}^{*+}$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}....D$;

$2,12....\mathbb{N}^*$; $\frac{1}{3}....D$; $\frac{1}{2}...D$; $\pi...\mathbb{Q}$; $\{1;2;-7\}...\mathbb{Z}$;

$0....\{4;-2;12\}$; $\mathbb{R}^*...\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{-*}....\mathbb{R}$; $\varnothing....\mathbb{R}$;

$\{0;\sqrt{2}\}...\mathbb{R}$

Corrigé : $6 \in \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$;

$-\frac{2}{3} \notin \mathbb{R}^+$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$; $\frac{6}{3} \in \mathbb{N}$; $\frac{\sqrt{100}}{5} \in \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;

$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$; $0 \notin \mathbb{R}^*$; $\frac{\sqrt{16}}{3} \in \mathbb{Q}$; $-\sqrt{2} \in \mathbb{R}^-$; $\frac{-7}{3} \notin \mathbb{Q}^{*+}$;

$-\frac{\sqrt{100}}{3} \notin D$; $2,12 \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{3} \notin D$; $\frac{1}{2} \in D$; $\pi \notin \mathbb{Q}$;

$\{1;2;-7\} \subset \mathbb{Z}$; $0 \notin \{4;-2;12\}$; $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{-*} \subset \mathbb{R}$;

$\varnothing \subset \mathbb{R}$; $\{0;\sqrt{2}\} \subset \mathbb{R}$

Exercice3 : (*) Dans chacun des cas, indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel le nombre appartient.

1) $\frac{125}{5}$ 2) $\frac{7}{5}$ 3) $\frac{21}{12}$ 4) $\frac{-35}{7}$ 5) $\frac{14}{21}$

Corrigé : 1) $\frac{125}{5} = 25 \in \mathbb{N}$ 2) $\frac{7}{5} = 1,4 \in D$

3) $\frac{21}{12} = \frac{7}{4} = 1,75 \in D$ 4) $\frac{-35}{7} = -5 \in \mathbb{Z}$ 5) $\frac{14}{21} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

Exercice4 : (***) Démonstration

1. Rappeler la définition d'un nombre décimal.
2. Démontrer que $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

(On pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers et un raisonnement par l’absurde).

Corrigé : 1) On a : $D = \left\{ a \times 10^{-n} = \frac{a}{10^n} \,/\, a \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \right\}$

Un nombre décimal est un nombre qui s’écrit sous la forme : $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}$

2) On raisonne par l’absurde : On suppose que : $\frac{9}{7}$ est un nombre décimal donc : $\frac{9}{7} = \frac{a}{10^n}$

Donc : $9 \times 10^n = 7a$ et on va décomposer en facteurs premiers on trouve :

$2^n \times 3^2 \times 5^n = 7a$ et puisque la décomposition en facteurs premiers est unique et 7 apparait à droite mais pas à gauche alors il y’a contradiction

Par suite : $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice5 : (***) Démontrer par l’absurde que: $\sqrt{2}$ n’est pas un rationnel

Corrigé : Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que : $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
$\sqrt{2}>0$, Il existe donc : $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$, tel que
$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On a alors : $\frac{p^2}{q^2}=2\Rightarrow p^2=2q^2$ (1)

On en déduit que p^2 est un nombre pair.
Le carré d'un nombre impair étant impair
p est donc nécessairement pair.
(En effet : $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$)
Comme p est pair, il existe $n\in\mathbb{N}$, tel que : $p=2n$
Donc : $p^2=4n^2$ (2)
En égalisant (1) et (2), on obtient : $2q^2=4n^2$
C'est-à-dire : $q^2=2n^2$
Comme $n^2\in\mathbb{N}$, on en déduit que q^2 est pair
Donc q est pair.

Ce qui est absurde car la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible

Par suite : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Exercice6 : (**)
1) Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Par exemple : $\frac{13193}{49950}=0,26412412412\ldots$

Mettre en évidence cette propriété avec les nombres rationnels suivants : $\frac{23}{22}$, $\frac{45}{11}$

2) Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique
Correspond à l'écriture d'un rationnel.
a) Compléter : $y=0,00723723723\ldots$
$\Rightarrow 1000y=7,23723723723\ldots\Rightarrow 1000y=7,23+y$
$\Rightarrow \ldots y=\ldots.$

$\Rightarrow$ L'écriture fractionnaire de y *est* $y=\frac{\ldots.}{\ldots.}=\frac{723}{99900}$

b) Compléter : $y=0,175175175\ldots$

$\Rightarrow 1000y=175.175175175\ldots\Rightarrow 1000y=175+y$
$\Rightarrow \ldots.\Rightarrow \ldots\ldots\Rightarrow$ L'écriture fractionnaire de y *est*

$y=\frac{\ldots}{\ldots.}$

c) En déduire l'écriture fractionnaire de

$y=0,141414\ldots\ldots$

Corrigé :1) $\frac{23}{22}=1,045454545454545\ldots$

$\frac{45}{11}=4,\mathbf{09}090909090909\ldots$

2) a) $y=0,00723723723\ldots$
$\Rightarrow 1000y=7,23723723723\ldots\Rightarrow 1000y=7,23+y$

$\Rightarrow 999y=7,23 \Rightarrow y=\frac{7,23}{999}=\frac{723}{99900}$

b) $y=0,175175175\ldots$

$\Rightarrow 1000y=175.175175175\ldots\Rightarrow 1000y=175+y$

$\Rightarrow 999y=175 \Rightarrow y=\frac{175}{999}$

c) l'écriture fractionnaire de $y=0,141414\ldots\ldots$

$\Rightarrow 100y=14.141414\ldots \Rightarrow 100y=14+y$

$\Rightarrow 99y=14 \Rightarrow y=\frac{14}{99}$

Exercice7 : (**) Calculer **et** simplifier :

$$A=\left(-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)(-4)+\left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{18}{5}\right)$$

$$B=\left(\frac{4}{9}-\frac{11}{27}\right)\left(2-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{7}{15}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$C=\frac{7}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$$

$$E=\frac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\frac{8-\frac{1}{5}-\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}} \qquad F=5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

$$G=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \qquad \text{et } H=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}$$

Corrigé : $A=\left(-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)(-4)+\left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{18}{5}\right)$

$$A=\left(\frac{-20+8+5}{20}\right)(-4)+\left(\frac{-45+100-24}{60}\right)\left(\frac{18}{5}\right)$$

$$A=\left(\frac{-7}{20}\right)\times(-4)+\frac{31}{60}\times\frac{18}{5}=\frac{7}{5}+\frac{93}{50}=\frac{70+93}{50}=\frac{163}{50}$$

$$B=\left(\frac{4}{9}-\frac{11}{27}\right)\left(2-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{7}{15}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{12-11}{27}\times\frac{6-4}{3}-\frac{9-7}{15}\times\frac{8-3}{6}$$

$$B=\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}-\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{81}-\frac{1}{9}=\frac{2-9}{81}=\frac{-7}{81}$$

$$C=\frac{7}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$$

$$C=\frac{7}{3}\times\frac{36-40+45}{60}+\frac{-5+4}{6}\times\frac{1-4}{6}=\frac{7}{3}\times\frac{41}{60}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$$

$$C=\frac{287}{180}+\frac{1}{12}=\frac{287+15}{180}=\frac{302}{180}=\frac{151}{90}$$

$$E=\frac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\frac{8-\frac{1}{5}-\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}=\frac{\frac{54-2+5}{6}}{\frac{-20+2-3}{4}}\times\frac{\frac{80-2-7}{10}}{\frac{4-6-5}{4}}=\frac{\frac{57}{6}}{\frac{-21}{4}}\times\frac{\frac{71}{10}}{\frac{-7}{4}}$$

$$E=\frac{57}{6}\times\frac{-4}{21}\times\frac{71}{10}\times\frac{-4}{7}=\frac{19}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{71}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{5395}{735}$$

$$F=5+\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}=5+\frac{1}{4+\frac{2}{7}}=5+\frac{7}{30}=\frac{150+7}{30}=\frac{157}{30}$$

$$G=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{3-1}{3}+\frac{3}{3+1}}{\frac{3+1}{3}-\frac{3}{3-1}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{17}{12}}{-\frac{1}{6}}=\frac{17}{12}\times-6=-\frac{17}{2}$$

$$H=\frac{\frac{7\pi-4}{\pi}}{\frac{12-21\pi}{1}}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}$$

$$H=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{-3(7\pi-4)}=-\frac{1}{3\pi}$$

Exercice8: (**) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que : $a-b=-\frac{7}{6}$ Calculer et simplifier :

$A_1=a-\left(b-\frac{71}{61}\right)$ et $A_2=\left(a-\frac{9}{5}\right)-\left(b-\frac{9}{5}\right)$

$A_3=\left(b+\frac{2020}{2021}\right)-\left(a-\frac{1}{2021}\right)$; $A_4=(2a-5)+(6-2b)$

Corrigé : $A_1=a-\left(b-\frac{71}{61}\right)=a-b+\frac{71}{61}=-\frac{7}{6}+\frac{71}{61}=-\frac{1}{336}$

$$A_2=\left(a-\frac{9}{5}\right)-\left(b-\frac{9}{5}\right)=a-\frac{9}{5}-b+\frac{9}{5}=a-b=-\frac{7}{6}$$

$$A_3=\left(b+\frac{2020}{2021}\right)-\left(a-\frac{1}{2021}\right)=b-a+\frac{2020}{2021}+\frac{1}{2021}$$

$$A_3=-(a-b)+\frac{2020+1}{2021}=-\left(-\frac{7}{6}\right)+\frac{2021}{2021}=\frac{7}{6}+1=\frac{7}{6}+\frac{6}{6}=\frac{13}{6}$$

$$A_4=(2a-5)+(6-2b)=2a-5+6-2b=2a-2b+1$$

$$A_4=2(a-b)+1=2\times-\frac{7}{6}+1=-\frac{7}{3}+1=-\frac{4}{3}$$

Exercice9 : (**) Soient a ; b et c des nombres réels non nuls tels que :

$\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$ et $\frac{c}{a}=7$ calculer : $\frac{a+b}{c}$

Corrigé : On a : $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ et nous avons $\frac{a}{c}=\frac{1}{7}$

Calculons $\frac{b}{c}$: $\frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{5}{7}$

Par conséquent : $\frac{a+b}{c}=\frac{1}{7}+\frac{5}{7}=\frac{6}{7}$

Exercice10 : (**) On pose :

$$A=900\left(\frac{3+33+333+3333}{9+99+999+9999}\right)^2$$

Montrer que : $A\in\mathbb{N}$

Corrigé : $A=900\left(\frac{3+33+333+3333}{9+99+999+9999}\right)^2$

$$A=900\left(\frac{3+33+333+3333}{3(3+33+333+3333)}\right)^2=900\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Donc : $A=900\times\frac{1}{9}=100\in\mathbb{N}$

Exercice11 : (**) Soient $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$ et $c\in\mathbb{R}^*$ tels que : $ab+bc+ca=0$

Calculer : $B=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}$

Corrigé :

$$B=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=\frac{ab(a+b)}{abc}+\frac{ac(a+c)}{abc}+\frac{bc(b+c)}{abc}$$

$$B=\frac{a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2}{abc}$$

$$B=\frac{\left(a^2b+a^2\right)c+\left(ab^2+b^2c\right)+\left(ac^2+bc^2\right)}{abc}$$

$$B=\frac{a(ab+ac)+b(ab+bc)+c(ac+bc)}{abc}$$

Or on a : $ab+bc+ca=0$ donc $ab+ca=-bc$ et $ab+bc=-ca$ et $ac+bc=-ab$

Donc :

$$B=\frac{a(-bc)+b(-ca)+c(-ab)}{abc}=\frac{-abc-abc-abc}{abc}=\frac{-3abc}{abc}=-3$$

Exercice12 : (**) Soient $x\in\mathbb{R}^*$; $y\in\mathbb{R}^*$

Montrer que si : $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$ alors $x=y$ ou $x=-y$

Corrigé : $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$ implique $x^2=y^2$

Implique $x^2-y^2=0$ c'est-à-dire : $(x-y)(x+y)=0$

Implique $x-y=0$ ou $x+y=0$

Implique $x=y$ ou $x=-y$

Exercice13 : (**) Calculer et simplifier : $A=\sqrt{\frac{9}{2}}$

$B=\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$; $C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$;

$E=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$F=\left(-\sqrt{10}\right)\times\left(-\sqrt{10}\right)+\sqrt{5}\times\left(-\sqrt{20}\right)-\sqrt{2}\times\sqrt{32}$

$G=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}-8\sqrt{8}\times 2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\times\sqrt{20}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{24}$

$H=5\sqrt{12}+8\sqrt{27}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}-\sqrt{147}$;

$K=\dfrac{6\sqrt{52}}{\sqrt{13}}-\left(5-\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right)$

Corrigé : $A=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

et $B=\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\dfrac{28}{14}}=\sqrt{2}$

$C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}=3\sqrt{4\times5}+4\sqrt{9\times5}-2\sqrt{16\times5}-\sqrt{36\times5}$

$C=3\times2\sqrt{5}+4\times3\sqrt{5}-2\times4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-6\sqrt{5}=\left(6+12-8-6\right)\sqrt{5}$

Donc : $C=4\sqrt{5}$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-5=3+2\sqrt{3\times2}+2-5$

Donc : $D=2\sqrt{6}$

$E=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

$E=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$E=\dfrac{3+2\sqrt{15}+5-\left(3-2\sqrt{15}+5\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{3+2\sqrt{15}+5-3+2\sqrt{15}-5}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{15}}{-2}=-2\sqrt{15}$

$F=\left(-\sqrt{10}\right)\times\left(-\sqrt{10}\right)+\sqrt{5}\times\left(-\sqrt{20}\right)-\sqrt{2}\times\sqrt{32}$

$F=\left(-\sqrt{10}\right)^2-\sqrt{5}\times\sqrt{5\times4}-\sqrt{2}\times\sqrt{2\times16}=10-\sqrt{5}^2\times2-\sqrt{2}^2\times4=10-10-8=-8$

$G=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-8\sqrt{8}\times2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\times\sqrt{20}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{24}$

$G=2\times\sqrt{3}^2-8\sqrt{8}\times\sqrt{8}-3\sqrt{5}\times\sqrt{5\times4}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2\times2\times3}$

$G=2\times3-8\sqrt{8}^2-3\sqrt{5}^2\times2+\sqrt{2}^2\times\sqrt{3}^2\times2=6-64-30+12=-76$

$H=5\sqrt{12}+8\sqrt{27}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}-\sqrt{147}$

$H=5\sqrt{4\times3}+8\sqrt{9\times3}+\sqrt{25\times3}-2\sqrt{16\times3}-\sqrt{49\times3}$

$H=10\sqrt{3}+24\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{3}-7\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

$K=\dfrac{6\sqrt{52}}{\sqrt{13}}-\left(5-\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right)=6\sqrt{\dfrac{52}{13}}-\left(5^2-\sqrt{13}^2\right)$

$K=6\sqrt{4}-\left(25-13\right)=12-12=0$

Exercice14 : (**) Soit $E=\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

Montrer que : E est nombre entier relatif

Corrigé :

$E=\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\dfrac{\left(5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+-5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}$

$E=\dfrac{5\sqrt{7}\sqrt{2}+5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{2}\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{35+10}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{45}{-5}=-9\in\mathbb{Z}$

Exercice15 : (*) Rendre le dénominateur rationnel le quotient suivant: $A=\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-4\sqrt{7}}$

Corrigé : Le conjuguée de l'expression $2\sqrt{5}-4\sqrt{7}$ est: $2\sqrt{5}+4\sqrt{7}$

$A=\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-4\sqrt{7}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+3\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{7}\right)}{\left(2\sqrt{5}-4\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{7}\right)}$

$A=\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-4\sqrt{7}}=\dfrac{10+4\sqrt{35}+6\sqrt{35}+84}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(4\sqrt{7}\right)^2}$

$A=\dfrac{94+10\sqrt{35}}{20-112}=-\dfrac{47+5\sqrt{35}}{46}$

Exercice16 : (*) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\sqrt{x+8}+\sqrt{x}=4$

1) Donner la valeur de l'expression : $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$ sans calculer x

2) Déterminer la valeur de x.

Corrigé : 1) On va multiplier par l'expression conjuguée de l'expression $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$ qui est : $\sqrt{x+8}+\sqrt{x}$

Donc :

$\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}$

$\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\dfrac{x+8-x}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}=\dfrac{8}{4}=2$

2) Détermination de la valeur de x :

On a : $\begin{cases}\sqrt{x+8}+\sqrt{x}=4 & (1)\\ \sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2 & (2)\end{cases}$ donc : par sommation

$(1)+(2)$ on a : $2\sqrt{x+8}=6$

Donc : $\sqrt{x+8}=3$ ce qui équivaut à : $\left(\sqrt{x+8}\right)^2=3^2$

C'est-à-dire : $x+8=9$ donc : $x=1$

Exercice17 : (**) Calculer et simplifier :

$$A=\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}$$

Corrigé : On a : $a=\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}=\frac{2\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}$

$$a=\frac{2\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{4}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}$$

$$b=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}$$

$$b=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$$

$$c=\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}=\frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}$$

$$c=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{3-11}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)}{-8}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{4}$$

Donc: $A=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}=a+b+c$

Donc: $A=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$.

Exercice18 : (**) Simplifier :

$$G=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} \quad \text{et} \quad H=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

Corrigé : On a :

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)}=\frac{3+2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{1}\right)^2}=3+2\sqrt{2}$$

Donc :

$$G=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\left|\sqrt{2}+1\right|=\sqrt{2}+1$$

Et

$$H=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{G}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}-1$$

Exercice19 : (***) Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que :

$x^2-2x-8=0$ et $x\succ 2$

Monter que : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)\in\mathbb{Q}$

Corrigé : $x^2-2x-8=0$ implique $x\left(x-2\right)=8$

C'est-à-dire : $x-2=\frac{8}{x}$

D'où $\frac{x-2}{x}=\frac{8}{x^2}$ et $\frac{x}{x-2}=\frac{x^2}{8}$

Par suite : $\sqrt{\frac{x-2}{x}}=\sqrt{\frac{8}{x^2}}=\frac{\sqrt{8}}{x}$ et $\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\sqrt{\frac{x^2}{8}}=\frac{x}{\sqrt{8}}$

car $x\succ 2\succ 0$

Donc : $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x-2}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{8}}{x}-\frac{x}{\sqrt{8}}\right)$

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{x}-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{x}-\frac{x}{4}=\frac{8-x^2}{4x}$$

Or : $x^2-2x-8=0$ implique $-2x=8-x^2$

Donc : $A=\frac{-2x}{4x}=\frac{-1}{2}\in\mathbb{Q}$

Exercice20 : (***) On pose :

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

Montrer que : $A\in\mathbb{N}$

Corrigé :

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

$$A=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

$$A=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

D'où $A\in\mathbb{N}$

Exercice21 : (*) Simplifier et ou écrire sous forme d'une puissance : $A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3$

$$B=\left(-3\right)^1\times\left(-3\right)^5\times\left(3\right)^2\times\left(-3\right)^{-10}$$

$$C=\frac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\frac{9}{2^2} \quad \text{et} \quad D=\frac{\left(-2\right)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times\left(-16\right)^{-4}}$$

$$E=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5} \quad \text{et} \quad F=\frac{3\times10^{-5}\times7,2\times10^7}{2\times15^3}$$

Corrigé :

$$A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3=2^3\times2^{2\times4}\times2^{-5\times3}=2^{3+8-15}=2^{-4}$$

Donc : $A=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

$$B=\left(-3\right)^1\times\left(-3\right)^5\times\left(3\right)^2\times\left(-3\right)^{-10}=-\left(3\right)^1\times-\left(3\right)^5\times\left(3\right)^2\times\left(3\right)^{-10}$$

$$B = 3^1 \times 3^5 \times 3^2 \times 3^{-10} = 3^{1+5+2-10} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$C = \frac{3^{-5} \times 4^{-2}}{12^3} \times \frac{9}{2^2} = \frac{3^{-5} \times \left(2^2\right)^{-2}}{\left(3 \times 2^2\right)^3} \times \frac{3^2}{2^2} = \frac{3^{-5} \times (2)^{-4} \times 3^2}{(3)^3 \times 2^6 \times 2^2}$$

$$C = \frac{3^{-5} \times (2)^{-4} \times 3^2}{(3)^3 \times 2^6 \times 2^2} = 3^{-5} \times 2^{-4} \times 3^2 \times (3)^{-3} \times 2^{-6} \times 2^{-2} = 3^{-5-3+2} \times 2^{-4-6-2}$$

Donc : $C = 3^{-6} \times 2^{-12}$

$$D = \frac{(-2)^3 \times \left(4^2\right)^{-1} \times 8}{1024 \times (-16)^{-4}} = \frac{-2^3 \times 4^{2\times(-1)} \times 2^3}{1024 \times \left(-2^3\right)^{-4}} = \frac{-2^3 \times \left(2^2\right)^{-2} \times 2^3}{2^{10} \times \left(-2^3\right)^{-4}}$$

$$D = -2^3 \times \left(2^2\right)^{-2} \times 2^3 \times 2^{-10} \times (-2)^{3\times 4}$$

$$= -2^{3-4+3-10+12} = -2^4 = -16$$

$$E = \frac{10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4}}{10^{-2} \times 10^3 \times 10^5} = 10^{-8} \times 10^9 \times 10^7 \times 10^{-4} \times 10^2 \times 10^{-3} \times 10^{-5}$$

$$E = 10^{-8+9+7-4+2-3-5} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$F = \frac{3 \times 10^{-5} \times 7,2 \times 10^7}{2 \times 15^3} = \frac{3 \times 10^{-5} \times 3^2 \times 2^3 \times 10^{-1} \times 10^7}{2 \times (3 \times 5)^3}$$

$$F = \frac{3 \times 3^2 \times 2^3 \times 10}{2 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{3 \times 3^2 \times 2^3 \times 2 \times 5}{2 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$$

Exercice22 : (**) Soit a un nombre décimal tel que: $a^3 = 15,625$ et $a^5 = 97,656225$

Calculer : a^2 et a^7 et a^6 et en déduire la valeur de a.

Corrigé : On a : $a^3 = 15,625$ et $a^5 = 97,656225$

Donc : $\frac{a^5}{a^3} = \frac{97,656225}{15,625} = 6,25$.

$a^7 = a^5 a^2 = 97,656225 \times 6,25 = 610,3515625$

$a^6 = \left(a^3\right)^2 = 244,140625$

Déduction de la valeur de a :

$a = \frac{a^7}{a^6} = \frac{610,3515625}{244,140625} = 2,5$

Exercice23 : (**) Soit a un réel non nul tel que: $a \neq 1$ et $a \neq -1$

1) Montrer que :

$$a^7 - 1 = (a-1)\left(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\right)$$

2) En déduire la valeur de :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

Corrigé : 1) $(a-1)\left(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\right)$

$= a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a - a^6 - a^5 - a^4 - a^3 - a^2 - a - 1$

$= a^7 - 1$

2) Déduction : On a :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$

D'après la question 1) on a :

$a^7 - 1 = (a-1)\left(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\right)$

Donc : $a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = \frac{a^7 - 1}{a - 1}$

Car $a \neq 1$; donc pour : $a = \frac{1}{2}$ on trouve :

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{128} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2\left(\frac{1}{128} - 1\right) = -2\left(\frac{-127}{128}\right) = \frac{127}{64}$$

Exercice24 : (*) Répondre avec vraie ou faux aux propositions suivantes :

1) L'écriture scientifique de : 149597870 est : $1,4959787 \times 10^8$

2) L'écriture scientifique de : -17000000 est : -1.7×10^7

3) $3,25 \times 10^4$ C'est une écriture scientifique

4) 15×10^3 c'est une écriture scientifique

Corrigé : Remarque : L'**écriture scientifique** est une forme d'écriture des nombres très petits ou très grands. Elle permet de raccourcir l'écriture de ces nombres.

L'écriture scientifique (ou notation scientifique) est très utilisée en astronomie et en chimie.

Les nombres sont écrits, en notation scientifique, sous la forme générale : $x = a \times 10^p$ ou $x = -a \times 10^p$

Avec 1 ≤ a < 10 et p est un nombre entier relatif.

1) L'écriture scientifique de : 149597870 est : $1,4959787 \times 10^8$ vraie

2) L'écriture scientifique de : -17000000 est : -1.7×10^7 vraie

3) $3,25 \times 10^4$ C'est une écriture scientifique vraie

4) 15×10^3 c'est une écriture scientifique fausse

Car 15 n'est pas compris entre 1 et 10

Exercice25 : (*) Convertir en écriture scientifique les nombres suivants :

1) 368 100 000 0 2) 0.0002

3) $25,46\times10^{-5}+30,29\times10^{-4}$

Corrigé : 1) $3681000000=3.681\times10^{9}$

2) $0.0002=2\times10^{-4}$

3) $25,46\times10^{-5}+30,29\times10^{-4}=2,546\times10^{-4}+30,29\times10^{-4}$

$=32,836\times10^{-4}=3,2836\times10^{-3}$

Exercice26 : (**) La distance de la terre au soleil est de 150 millions de km
L'épaisseur d'une feuille de papier est de 0.01 mm
Combien de feuilles de papier pourrait-on superposer de la terre au soleil ?

Corrigé : On sait que : $0,46mm=10^{-8}km$
Le nombre de feuilles de papier est donc :

$$\frac{150\times10^{6}}{10^{-8}}=150\times10^{6-(-8)}=150\times10^{14}=1,5\times10^{16}$$

Exercice27 : (**) Simplifier $a\in\mathbb{R}^*$

$A=\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^{-5}\times\left(\sqrt{2}\right)^{3}$

$B=\left(\left(-\sqrt{3}\right)^{-2}\right)^{2}$; $C=\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{4}$

$D=\frac{a^{-2}\times(-a)^{5}}{-a\times a^{-4}}\times\frac{a^{-1}\times\left(a^{-2}\right)^{5}}{\left((-a)^{4}\right)^{-2}}$. $E=\left(\frac{a\times\left(a^{-3}\right)^{-2}}{a^{-2}\times\left(a^{-4}\times a^{7}\right)^{2}}\right)^{-3}$ et

$F=\left(-\frac{1}{8}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{6}\times\left(-\frac{5}{2}\right)^{3}$ $G=\left(\frac{5^{3}\times2^{-3}}{4\times25}\right)^{2}\times\frac{2^{8}}{10^{2}\times5}$.

Corrigé : $A=\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^{-5}\times\left(\sqrt{2}\right)^{3}$

$A=-\left(\sqrt{2}\right)^{(-2+2-5+3)}=-\left(\sqrt{2}\right)^{-2}=-\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}}=-\frac{1}{2}$

$B=\left(\left(-\sqrt{3}\right)^{-2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}^{2}}\right)^{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{9}$

$C=\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{2^{4}}{3^{4}}=2^{4}\times3^{-4}$

$D=\frac{a^{-2}\times(-a)^{5}}{-a\times a^{-4}}\times\frac{a^{-1}\times\left(a^{-2}\right)^{5}}{\left((-a)^{4}\right)^{-2}}=\frac{-a^{-2}\times a^{5}\times a^{-1}\times a^{-10}}{-a\times a^{-4}\times a^{-8}}$

$$D=\frac{a^{(-2+5-1-10)}}{a^{(1-4-8)}}=\frac{a^{-8}}{a^{-11}}=a^{-8+11}=a^{3}$$

$E=\left(\frac{a\times\left(a^{-3}\right)^{-2}}{a^{-2}\times\left(a^{-4}\times a^{7}\right)^{2}}\right)^{-3}=\left(\frac{a\times a^{6}}{a^{-2}\times a^{6}}\right)^{-3}=\left(\frac{a}{a^{-2}}\right)^{-3}$

$E=\left(a\times a^{2}\right)^{-3}=\left(a^{3}\right)^{-3}=a^{-9}$

$F=\left(-\frac{1}{8}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{6}\times\left(-\frac{5}{2}\right)^{3}$

$F=-\left(\frac{1}{2^{3}}\right)^{2}\times\frac{2^{6}}{5^{6}}\times\frac{5^{3}}{2^{3}}=-\frac{2^{6}\times5^{3}}{2^{6}\times5^{6}\times2^{3}}$

$F=-\frac{2^{6}\times5^{3}}{2^{9}\times5^{6}}=-\frac{1}{2^{3}\times5^{3}}=-\frac{1}{(2\times5)^{3}}=-\frac{1}{10^{3}}=-10^{-3}$

$G=\left(\frac{5^{3}\times2^{-3}}{4\times25}\right)^{2}\times\frac{2^{8}}{10^{2}\times5}=\frac{5^{6}\times2^{-6}}{\left(2^{2}\times5^{2}\right)^{2}}\times\frac{2^{8}}{\left(2^{2}\times5^{2}\right)\times5}$

$G=\frac{5^{6}\times2^{-6}\times2^{8}}{2^{4}\times5^{4}\times2^{2}\times5^{2}\times5}=\frac{5^{6}\times2^{2}}{2^{6}\times5^{7}}=\frac{1}{2^{4}\times5}=\frac{1}{80}$

Exercice28 : (*) $a\in\mathbb{R}^*$; $b\in\mathbb{R}^*$

On considère le nombre : $C=\frac{\left(ab^{2}\right)^{3}\times a^{4}b^{2}}{(ab)^{5}}$

1) Calculer et simplifier C
2) Ecrire C sous la forme d'une puissance de base 10 Sachant que ; $a=\frac{1}{10}$ et $b=100$.

Corrigé : 1)

$C=\frac{\left(ab^{2}\right)^{3}\times a^{4}b^{2}}{(ab)^{5}}=\frac{a^{3}\times b^{6}\times a^{4}\times b^{2}}{a^{5}\times b^{5}}=\frac{a^{7}\times b^{8}}{a^{5}\times b^{5}}=a^{2}\times b^{3}$

2) $a=\frac{1}{10}$ et $b=100$

Donc : $C=\left(10^{-1}\right)^{2}\times\left(10^{2}\right)^{3}=10^{-2}\times10^{6}=10^{4}$

Exercice29 : (**) Ecrire en notation scientifique les nombres suivants :
A = $35\times10^{6}+3\times10^{6}+2,9\times10^{6}$
B = $-0,8\times10^{7}+0,05\times10^{7}-2,32\times10^{7}$
C = $9\times10^{-3}+0,4\times10^{-2}-9\times10^{-4}$

Corrigé : A = $35\times10^{6}+3\times10^{6}+2,9\times10^{6}$
$=40.9\times10^{6}=4,09\times10^{7}$
B= $-0,8\times10^{7}+0,05\times10^{7}-2,32\times10^{7}$
$=(-0,8+0,05-2,32)\times10^{7}=-1,55\times10^{7}$
C = $9\times10^{-3}+4\times10^{-3}-0.9\times10^{-3}$
$=(13-0.9)\times10^{-3}=12.1\times10^{-3}=1,21\times10^{-2}$

Exercice30: (**) $x\in\mathbb{R}$ Développer et calculer et simplifier : $A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{2}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^{2}$

$B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^{2}$ et $C=\left(\sqrt{2}+1\right)^{3}$

$D=(3x-2)^{3}$ et $E=(x+2)\left(x^{2}-2x+4\right)$

$F=(200520052006)^{2}-(200520052005\times200520052007)$

(Lorsque la calculatrice tombe en panne)

$H=\left(\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\right)^2+\left(x\sqrt{5}-\frac{3}{2}\right)^2$ et $M=\left(x^2-2x+1\right)^2$

$N=\left(x\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-x\sqrt{2}\right)$ $R=\left(x^3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x^3\right)$

$L=\left(3x+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(3x+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

Corrigé :

$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$

$A=5+2\sqrt{10}+2-\left(5-2\sqrt{10}+2\right)=5+2\sqrt{10}+2-5+2\sqrt{10}-2=4\sqrt{10}$

$B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=\left(2-3\right)^2=\left(-1\right)^2=1$

$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\times1+3\sqrt{2}\left(1\right)^2+\left(1\right)^3=2\sqrt{2}+3\times2+3\sqrt{2}+1$

$C=5\sqrt{2}+7$

$D=\left(3x-2\right)^3=\left(3x\right)^3-3\left(3x\right)^2\times2+3\times3x\times\left(2\right)^2-\left(2\right)^3$

$D=27x^3-54x^2+36x-8$

$E=\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)=\left(x+2\right)\left(x^2-2\times x+2^2\right)=x^3+2^3=x^3+8$

$F=\left(200520052006\right)^2-\left(200520052005\times200520052007\right)$

On remarque que les nombres :
200520052006 et 200520052005 et 200520052007 différent par leurs chiffes des unités

Pour simplifier on pose : $x=200520052006$

Donc : $200520052005=x-1$
et $200520052007=x+1$

Donc : $F=x^2-\left(x-1\right)\left(x+1\right)$

$=x^2-\left(x^2-1\right)=x^2-x^2+1=1$ Donc : $F=1$

$H=\left(\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\right)^2+\left(x\sqrt{5}-\frac{3}{2}\right)^2$

$H=\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\frac{x}{2}2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(x\sqrt{5}\right)^2-2x\sqrt{5}\times\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$H=\frac{x^2}{4}+2x\sqrt{3}+12+5x^2-3x\sqrt{5}+\frac{9}{4}$

$H=\frac{21}{4}x^2+\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)x+\frac{57}{4}$

$M=\left(x^2-2x+1\right)^2=\left(\left(x^2-2x\right)+1\right)^2$

$M=\left(x^2-2x\right)^2+2\left(x^2-2x\right)\times1+1^2$

$M=\left(x^2\right)^2-2x^2\times2x+4x^2+2x^2-4x+1$

$M=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

$N=\left(x\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-x\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{5}+x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-x\sqrt{2}\right)$

$N=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=5-2x^2$

$R=\left(x^3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x^3\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+x^3\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x^3\right)$

$R=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(x^3\right)^2=\frac{3}{4}-x^6$

$L=\left(3x+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(3x+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\left(3x+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)\left(\left(3x+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)$

$L=\left(3x\right)^2+6x\sqrt{2}+2-5=9x^2+6x\sqrt{2}-3$

Exercice31 : (**) $a\in\mathbb{R}$ on pose :

$A=\left(a+1\right)^2-\left(a-1\right)^2$

1) Développer et calculer et simplifier A
2) En déduire une simplification du nombre:
$\left(9999999\right)^2-\left(9999997\right)^2$

Corrigé : 1) $A=\left(a+1\right)^2-\left(a-1\right)^2=a^2+2a+1-\left(a^2-2a+1\right)$

Donc : $A=a^2+2a+1-a^2+2a-1=4a$

2) On pose : $a=9999998$

Donc : $A=\left(9999999\right)^2-\left(9999997\right)^2=4\times9999998$

Par suite: $\left(9999999\right)^2-\left(9999997\right)^2=39999992$

Exercice32 : (*) Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$

1) $49x^2-81$ 2) $16x^2-8x+1$ 3) x^3-8
4) $C=\left(x+1\right)\left(2x-3\right)+6\left(x+1\right)$ 5) $D=27x^3+1$

Corrigé : 1) On regarde l'expression, pour choisir l'identité remarquable à appliquer.
L'expression semble être de la forme : a² - b².

$49x^2-81=\left(7x\right)^2-9^2=\left(7x-9\right)\times\left(7x+9\right)$ Il s'agit d'un produit. L'expression est factorisée.

2) $16x^2-8x+1=\left(4x\right)^2-2\times4x\times1+1^2=\left(4x-1\right)^2$

3) $x^3-8=\left(x\right)^3-\left(2\right)^3=\left(x-2\right)\left(x^2+2x+2^2\right)$

$x^3-8=\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)$

4) $x+1$ est le facteur commun :

$C=\left(x+1\right)\left(2x-3\right)+6\left(x+1\right)$

$C=\left(x+1\right)\left(\left(2x-3\right)+6\right)=\left(x+1\right)\left(2x+3\right)$

5) $D=27x^3+1$ Il n'y a pas de facteur commun.
L'expression semble être de la forme a^3+b^3.

$D=27x^3+1=\left(3x\right)^3+1^3=\left(3x+1\right)\left(\left(3x\right)^2-\left(3x\right)\times1+1^2\right)$

$D=\left(3x+1\right)\left(9x^2-3x+1\right)$

Méthodes : Pour factoriser une expression on peut :
- identifier une identité remarquable ou
- identifier un facteur commun

Exercice33 : (*) Remplissez les blancs suivants :

$10-4\sqrt{6}=\left(\ldots-\ldots\right)^2$ et $4+2\sqrt{2}=\left(\ldots+\ldots\right)^2$

Corrigé : 1) On a :

$$4+2\sqrt{3}=4+2\times\sqrt{3}\times1=3+2\times\sqrt{3}\times1+1=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times1+\left(1\right)^2$$

Donc : $4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

$$10-4\sqrt{6}=10-2\times2\sqrt{6}=2^2-2\times2\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2=\left(2-\sqrt{6}\right)^2$$

Donc : $10-4\sqrt{6}=\left(2-\sqrt{6}\right)^2$

Exercice34 : (*) Ecrire les expressions suivantes sous la forme : $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$

1) $11+6\sqrt{2}$ 2) $6+4\sqrt{2}$ 3) $9-4\sqrt{5}$
4) $3-2\sqrt{2}$ 5) $12-6\sqrt{3}$ 6) $7-4\sqrt{3}$

Corrigé :1)

$$11+6\sqrt{2}=9+2\times3\sqrt{2}+2=3^2+2\times3\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(3+\sqrt{2}\right)^2$$

2) $6+4\sqrt{2}=4+2\times2\sqrt{2}+2=2^2+2\times2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$

3) $9-4\sqrt{5}=4-2\times2\sqrt{5}+5=2^2-2\times2\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(2-\sqrt{5}\right)^2$

4) $3-2\sqrt{2}=1-2\times1\sqrt{2}+2=1^2-2\times1\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

5) $12-6\sqrt{3}=9-2\times3\sqrt{3}+3=3^2-2\times3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(3-\sqrt{3}\right)^2$

6) $7-4\sqrt{3}=4-2\times2\sqrt{3}+3=2^2-2\times2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$

Exercice35 : (***) $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $a\geq b$

Montrer que : $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)$

Corrigé : Pour montrer que deux nombres positifs sont égaux on pourra montrer que leurs carrés sont égaux :

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=a+\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$=\frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times\left(\left(\sqrt{a-b}\right)^2+2\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right)$$

$$=\frac{2}{4}\times\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times\left(a-b+2\sqrt{(a-b)(a+b)}+a+b\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(2a+2\sqrt{(a-b)(a+b)}\right)=a+\sqrt{(a-b)(a+b)}=a+\sqrt{a^2-b^2}$$

Donc on a :

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\right)^2$$

Par suite : $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)$

Exercice36 : (*) (**) (***) Factoriser les expressions suivantes : $x\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$A=16x^2-8x+1$ $B=16-25x^2$

$C=1-(1-3x)^2$ $D=(2x-1)^3-8$

$E=27+x^3$ $F=x^{12}-2x^6+1$

$G=x^5+x^3-x^2-1$

$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-(x+1)$; $M=x^4-49$

$N=a^2+b^2-x^2+2ab$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+(1-2x)\left(2x-\sqrt{5}\right)$

$K=(x-2)(3x-4)+x^3-8$

$R=x^2-6x+8$ $S=ax+ay-bx-by$

$U=a^2-a-x^2+x$

$V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

Corrigé :

$$A=16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times4x\times1+1^2=(4x-1)^2$$

$$B=16-25x^2=(4)^2-(5x)^2=(4-5x)(4+5x)$$

$$C=1-(1-3x)^2=1^2-(1-3x)^2=(1-(1-3x))(1+(1-3x))$$

$$C=(1-1+3x)(1+1-3x)=3x(2-3x)$$

$$D=(2x-1)^3-8=(2x-1)^3-2^3$$

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

Donc : $D=((2x-1)-2)\left((2x-1)^2+(2x-1)\times2+2^2\right)$

$$D=(2x-3)\left((2x)^2-4x+1+4x-2+4\right)=(2x-3)\left(4x^2+3\right)$$

$$E=27+x^3=3^3+x^3=(3+x)\left(3^2-3x+x^2\right)$$

Car : $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$.

$$E=(3+x)\left(9-3x+x^2\right)$$

$$F=\left(x^6\right)^2-2x^6+1=\left(x^6\right)^2-2x^6\times1+1^2=\left(x^6-1\right)^2$$

$$G=x^5+x^3-x^2-1=x^3\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)=\left(x^3-1\right)\left(x^2+1\right)$$

$$H=x^3+1+2\left(x^2-1\right)-(x+1)=x^3+1^3+2\left(x^2-1^2\right)-(x+1)$$

$$H=(x+1)\left(x^2-x+1^2\right)+2(x+1)(x-1)-(x+1)$$

$$H=(x+1)\left(x^2-x+1+2(x-1)-1\right)=(x+1)\left(x^2-x+1+2x-2-1\right)$$

$$H=(x+1)\left(x^2+x-2\right)$$

$$M=x^4-49=x^4-\left(\sqrt{7}\right)^4=\left(x^2\right)^2-\left(\sqrt{7}^2\right)^2$$

$M=\left(x^2-\sqrt{7}^2\right)\left(x^2+\sqrt{7}^2\right)=\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x^2+7\right)$

$N=a^2+b^2-x^2+2ab=a^2+2ab+b^2-x^2=\left(a+b\right)^2-x^2$

Donc : $N=\left(a+b-x\right)\left(a+b+x\right)$

$L=4x^2-4x\sqrt{5}+5+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$

$L=\left(2x\right)^2-2\times2x\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)$

$L=\left(2x-\sqrt{5}\right)^2+\left(1-2x\right)\left(2x-\sqrt{5}\right)=\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x-\sqrt{5}+1-2x\right)$

C'est-à-dire : $L=\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)$

$K=\left(x-2\right)\left(3x-4\right)+x^3-8=\left(x-2\right)\left(3x-4\right)+\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)$

$K=\left(x-2\right)\left(3x-4+x^2+2x+4\right)=\left(x-2\right)\left(x^2+5x\right)=x\left(x-2\right)\left(x+5\right)$

$R=x^2-6x+8=x^2-6x+9-1=x^2-2\times3x+3^2-1$

$R=\left(x-3\right)^2-1^2=\left(x-3-1\right)\left(x-3+1\right)=\left(x-4\right)\left(x-2\right)$

$S=ax+ay-bx-by=a\left(x+y\right)-b\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(a-b\right)$

$U=a^2-a-x^2+x=a^2-x^2-\left(a-x\right)$

$U=\left(a-x\right)\left(a+x\right)-\left(a-x\right)\times1$

Donc : $U=\left(a-x\right)\left(a+x-1\right)$.

$V=a^4+b^4-x^4-2a^2b^2+4abx^2$

$V=\left(a^4+2a^2b^2+b^4\right)-\left(x^4-4abx^2+4a^2b^2\right)$

$V=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(x^2-2ab\right)^2=\left(a^2+b^2+x^2-2ab\right)\left(a^2+b^2-x^2+2ab\right)$

Exercice37 : (**) On pose : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) Déterminer le signe de B

2) Calculer B^2.

3) En déduire une écriture simple de B.

Corrigé : 1) On a : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Et on Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc: $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ et par suite:

$\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ est négatif

C'est à dire que : $B<0$

2) $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

$B^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-20}=12-2\sqrt{16}=12-2\times4=4$

4) $B^2=4$ Equivalent a: $B=\sqrt{4}$ ou $B=-\sqrt{4}$

Equivalent a: $B=2$ ou $B=-2$ or on a : $B<0$

Donc : $B=-2$.

Exercice38: (**) On pose : $a=\sqrt{19+6\sqrt{10}}$ et $b=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$

1) Montrer que : $a\times b=1$

2) On pose : $u=a+b$ et $v=a-b$

Calculer : u^2 et v^2

3) En déduire une écriture simple de u et v

4) En déduire une écriture simple de a et b

Corrigé :

$ab=\sqrt{19+6\sqrt{10}}\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{\left(19+6\sqrt{10}\right)\left(19-6\sqrt{10}\right)}$

$ab=\sqrt{19^2-\left(6\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{361-360}=\sqrt{1}=1$

2) On a : $u=a+b$ et $V=a-b$

Donc: $u^2=\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab=a^2+b^2+2\times1$

Donc; $u^2=19+6\sqrt{10}+19-6\sqrt{10}+2\times1=40$

Et : $v^2=\left(a-b\right)^2=a^2+b^2-2ab=a^2+b^2-2\times1$

Donc: $v^2=19+6\sqrt{10}+19-6\sqrt{10}-2\times1=36$

3) Déduction d'une écriture simple de u et v :

On a : $u^2=40$ donc: $u=\sqrt{40}$ ou $u=-\sqrt{40}$

Or on sait que : $u=a+b$ donc u est la somme de deux nombres positif donc c'est un nombre positif

Donc: $u=\sqrt{40}=\sqrt{4\times10}=2\sqrt{10}$

On a aussi : $v^2=36$ et on Remarque que : $a>b$ donc: v est positif par suite : $v=\sqrt{36}=6$

4) Déduire une écriture simple de a et b !

On a : $\begin{cases}u=2\sqrt{10}\\v=6\end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases}a+b=2\sqrt{10}\\a-b=6\end{cases}$

En faisant la somme membre à membre les deux équations : On trouve: $2a=6+2\sqrt{10}$

Donc : $a=\dfrac{6+2\sqrt{10}}{2}=3+\sqrt{10}$

Et on a : $a+b=2\sqrt{10}$ donc: $b=2\sqrt{10}-a$

Equivaut à : $b=2\sqrt{10}-3-\sqrt{10}$ par suite: $b=\sqrt{10}-3$

Exercice39 : (**)1) Montrer que : $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}$

2) Montrer que : $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Corrigé : 1) Montrons que :

$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}$

On pose : $B=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$

On calcul B^2 : $B^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2+2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

$B^2=3+\sqrt{5}+2\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}+3-\sqrt{5}$

$B^2=6+2\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=6+2\sqrt{9-5}=6+2\sqrt{4}=6+4=10$

Donc : $B^2=10$

Donc: $B=\sqrt{10}$ ou $B=-\sqrt{10}$ et on a $B>0$

Par suite: $B=\sqrt{10}$.

2) On pose : $B=\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On calcul B^2:

$B^2=\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$

$B^2=\frac{6+\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\left(\frac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\frac{6-\sqrt{31}}{2}\right)}+\frac{6-\sqrt{31}}{2}$

$B^2=6+2\sqrt{\frac{36-31}{4}}=6+2\sqrt{\frac{5}{4}}=6+\sqrt{5}$

Donc: $B^2=6+\sqrt{5}$

Par suite: $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or on a : $B>0$ donc: $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Donc: $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Exercice40 : (***) $n\in\mathbb{N}^*$

1) Déterminer les nombres a et b tels que :

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$

2) En déduire la valeur du nombre :

$A=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+...+\frac{1}{2020\times 2021}$

Corrigé : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$

Équivaux a : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$

Équivaux a : $a(n+1)+bn=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Pour : n=1 on a : $2a+b=1$

Pour : n=2 on a : $3a+2b=1$

On va donc résoudre le système suivant :

$\begin{cases}2a+b=1 & (1)\\ 3a+2b=1 & (2)\end{cases}$

Par exemple Par la Méthode de substitution

On exprime b en fonction de a dans la première équation et on obtient le système équivalent :

$\begin{cases}b=1-2a\\ 3a+2b=1\end{cases}$ On remplace ensuite b par $1-2a$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$\begin{cases}b=1-2a\\ 3a+2(1-2a)=1\end{cases}$ Qui équivaut à $\begin{cases}b=1-2a\\ -a+2=1\end{cases}$

Soit encore à $\begin{cases}b=1-2a\\ a=1\end{cases}$ et on remplace a par 1 dans la première équation on trouve $\begin{cases}b=-1\\ a=1\end{cases}$

Par suite : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2) D'après la question précédente on a :

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $n=1$: $\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$

$n=2$: $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=3$: $\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

Ainsi de suite…

$n=2020$: $\frac{1}{2020\times 2021}=\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$

Donc : $A=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+...+\frac{1}{2020\times 2021}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$

On simplifiant avec les nombres opposés on trouve :

$A=1-\frac{1}{2021}=\frac{2021-1}{2021}=\frac{2020}{2021}$

Exercice41 : (***) Soient : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $c\in\mathbb{R}^*$ tels que : $a\neq b$ et $b\neq c$ et $a\neq c$ et $a+b+c=0$

1) Montrer que : $a^3+b^3+c^3=3abc$

2) En déduire que : $c^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$

Corrigé :1) Calculons : $(a+b+c)^3$

$(a+b+c)^3=\left((a+b)+c\right)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

$=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab(a+b)+3ac(a+c)+3bc(b+c)$

Or on a : $a+b+c=0$

Donc : $a+b=-c$ et $a+c=-b$ et $b+c=-a$

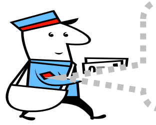
Donc :

$\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab\left(-c\right)+3ac\left(-b\right)+3bc\left(-a\right)$

$\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+6abc-3abc-3abc-3abc$

Donc : $\left(0\right)^3=a^3+b^3+c^3-3abc$

Par suite : $a^3+b^3+c^3=3abc$



Factoriser c'est écrire sous la forme d'un **produit**

3) Déduction de : $c^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$

$\left(a+b\right)^4=\left(\left(a+b\right)^2\right)^2=\left(a^2+2ab+b^2\right)^2$

$\left(a+b\right)^4=a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b+2a^2b^2+4ab^3$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+6a^2b^2+4a^3b+4ab^3$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(3ab+2a^2+2b^2\right)$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(-ab+2a^2+4ab+2b^2\right)$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(2\left(a+b\right)^2-ab\right)$

$\left(a+b\right)^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$

Et puisque on a : $a+b=-c$ alors : $\left(a+b\right)^4=c^4$

Et par suite : $c^4=a^4+b^4+2ab\left(2c^2-ab\right)$.