Exercices avec corrections sur les équations Et inéquations et systèmes partie3

Types d'exercices :
Application directe du cours (*)
Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***)

Évariste Galois est un mathématicien français, né le 25 octobre 1811 à Bourg-Égalité (aujourd'hui Bourg-la-Reine) et mort le 31 mai 1832 à Paris.
Évariste Galois offre une condition nécessaire et suffisante à la résolution d'une équation

Exercice1 : (*) et (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : 1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$

3) $(x+2)^2=9$ 4) $5x^2-4x=0$

5) $3x^2-x-2=0$ (on peut utiliser l'écriture canonique)

Solution : 1) L'équation : $x^2=16$
16 est positif donc l'équation admet deux solutions
$x=\sqrt{16}=4$ et. $x=-\sqrt{16}=-4$
Donc l'ensemble de toutes les solutions est :
$S=\{-4;4\}$

2) L'équation : $x^2=-8$ -8 est négatif
Donc : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : $S=\varnothing$

3) L'équation : $(x+2)^2=9$

On a alors $x+2=3$ ou . $x+2=-3$
L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x=-5$
Donc : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

C'est-à-dire : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$ donc : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$: On va d'abord Factoriser le trinôme $3x^2-x-2$:

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times 3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

Cette écriture s'appelle la forme canonique.

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$3x^2-x-2=0$ Signifie que : $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions : $x=1$ et $x=-\frac{2}{3}$

Donc : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

Exercice2 : (**) Déterminer la forme canonique des trinômes suivants:
1) $5x^2+20x-65$ 2) $3x^2-x-2$

Solution : 1) Pour écrire $5x^2+20x-65$ sous forme canonique on commence par factoriser le trinôme par le coefficient qui est devant x^2.
On obtient $5(x^2+4x-13)$.
Puis on doit transformer $x^2+4x-13$ en factorisant avec les identités remarquables :
Pour cela on utilise les deux premiers termes de $x^2+4x-13$ (x^2 correspond à a^2 et $4x$ à $2ab$)
Donc $a=x$ et $2ab=4x$ c'est-à-dire : $b=2$.
Donc $x^2+4x-13=(x+2)^2-...-13$.
Si on développe $(x+2)^2$ on obtient x^2+4x+4.
Pour avoir seulement x^2+4x on doit retrancher 4.
Donc $x^2+4x-13=(x+2)^2-4-13=(x+2)^2-17$.
Donc $5x^2+20x-65=5[(x+2)^2-17]$.
Donc $5x^2+20x-65=5(x+2)^2-85$.
$5(x+2)^2-85$ est la forme canonique de $5x^2+20x-65$.

2) $3x^2-x-2$: Autre méthode pour déterminer la forme canonique :
Calculons le discriminant : $a = 3$, $b = -1$ et $c = -2$
donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25$

La forme canonique est: $3x^2-x-2=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{25}{4\times 3^2}=-\frac{25}{36}$

$3x^2-x-2=3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$: La forme canonique

Exercice3 : (*) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

c) $x^2 + 3x + 10 = 0$ d) $6x^2 - x - 1 = 0$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$ donc : $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$

Et le trinôme $2x^2 - x - 6$ à une forme factorisée :

$$2x^2 - x - 6 = a\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$$

C'est-à-dire : $2x^2 - x - 6 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-2) = (2x+3)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$ à une forme factorisée : $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$: a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle. C'est-à-dire : $S = \varnothing$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$.

On a : $\Delta = 1 + 24 = 25$

Donc : $x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Par suite :: $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

Par suite : $R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Exercice4 : (*) **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ 2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$ 4) $3x - 15\sqrt{x} + 18 = 0$

Solution : 1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\times 6\times(-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

2) $a = 2$; $b = -2\sqrt{2}$; $c = 1$; $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4\times 2\times 1 = 8 - 8 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4\times 3\times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle . C'est-à-dire : $S = \varnothing$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$:

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 16$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times 4}$ et $x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times 4}$

$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

4) $3x - 15\sqrt{x} + 18 = 0$ avec : $x \geq 0$

Faisons un changement de variable :

En posant : $t = \sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $3t^2 - 15t + 18 = 0$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 3 \times 18 = 225 - 216 = 9 \succ 0$

Les solutions de : $3t^2 - 15t + 18 = 0$

Sont: $t_1 = \frac{15-3}{6} = 2$ ou $t_2 = \frac{15+3}{6} = 3$

Donc on a : $\sqrt{x} = 2$ ou $\sqrt{x} = 3$

Donc : $x = 4$ ou $x = 9$ Par suite : $S = \{4; 9\}$

Exercice5 : (*) Factoriser les trinômes :

a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

Solution :a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$: Calcul du discriminant :

$\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont: $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4}=\frac{1}{4}$

On a donc :

$$4x^2+19x-5=4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1).$$

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times9}=\frac{1}{3}$:

Et le trinôme $9x^2-6x+1$ a une forme factorisée :

$$9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2.$$

Exercice6 : (**) Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus .
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés
Et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60=np$ et $60=(n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2+3n-180=0$

Calcul du discriminant: $\Delta = 729>0$ Les solutions sont :

$n_1=\frac{-3+\sqrt{729}}{2\times1}=12$ et $n_2=\frac{-3-\sqrt{729}}{2\times1}=-15$

Nous rejetons $n_2=-15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

Exercice7 : (**) La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470.
Quel est le premier de ces nombres?

Solution Appelons x le premier de ces trois nombres.
x vérifie l'équation : $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=3470$

Donc : $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=3470$

Donc : $3x^2+6x+5=3470$

C'est-à-dire : $3x^2+6x-3465=0$

Calculons: $\Delta=6^2-4\times3\times(-3465)=36+41580=41616$

Les deux valeurs possibles pour x sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6-204}{6}=\frac{-210}{6}=-35$$

Et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6+204}{6}=33$

Comme x est un entier naturel x est positif le premier des trois nombres est 33.

Exercice8 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

(E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$

Solution :- On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$:

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est :

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times2}=2$

Donc : $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est :

$\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

$2x^2+13x+6=2(x+6)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-6\,;-\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

donc : $\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)}=0$ C'est-à-dire : $x+6-x^2=0$

car $x\neq-\frac{1}{2}$ et $x\neq-6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est : $\Delta'' = 25$

Les racines sont: $x_1''=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=3$ et $x_2''=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=-2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3

Donc $S=\{-2;3\}$

Exercice9 : (*) Soit le trinôme $2019x^2-2020x+1$

a) Vérifier que 1 est racine du trinôme

b) Trouver l'autre racine du trinôme

Solution :a)

$2019\times1^2-2020\times1+1=2019-2020+1=2020-2020=0$

donc $x_1=1$

b) a = 2019, b = -2020 et c = 1

On a : $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ donc $1\times x_2=\frac{1}{2019}$

C'est-à-dire : $x_2=\frac{1}{2019}$

Exercice10 : (***) Soit le trinôme

$(E)\ :P(x)=-3x^2+\sqrt{3}x+3$

1) Prouver que le trinôme (E) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer.

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$;

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) : $a=-3$ et et $b=\sqrt{3}$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=\sqrt{3}^2-4\times(-3)\times3=3+36=39$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (E) a deux racines distinctes : α et β

2) On a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

Donc $\alpha+\beta=\frac{-\sqrt{3}}{-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\alpha\times\beta=\frac{3}{-3}=-1$

Et $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Donc $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

Donc $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-2(-1)=\frac{3}{9}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

On a : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{7}{3}}{-1}=-\frac{7}{3}$

On sait que : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Donc : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

C'est-à-dire : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Donc :

$\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-3(-1)\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{27}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{9}$

Exercice11 : (**) Donner une équation du second degré qui a pour solutions: α et β dans les cas suivants : 1) $\alpha=1$ et $\beta=-2$

2) $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ 3) $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$

Solution : On sait que : si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors ils sont solutions de l'équation :

$x^2-sx+p=0$ avec : $\begin{cases}x+y=s\\x\times y=p\end{cases}$

1) On a : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ solutions de l'équation du second degré donc : $x^2-(1+(-2))x+1\times(-2)=0$

C'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

2) On a : $\alpha=-1$ et $\beta=\sqrt{2}$ solutions de l'équation du second degré

Donc : $x^2-\left(-1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\times(-1)=0$

C'est-à-dire : $x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}=0$

3) On a : $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$ solutions de l'équation du second degré

Donc : $x^2-\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Signifie que : $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0$

C'est-à-dire : $6x^2-x-1=0$.

Exercice12 : (***) Sans calculer le discriminant Δ

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2-6x+8=0$ 2) $x^2-7x+12=0$

3) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$

4) $x^2+x-6=0$ 5) $4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=0$

Solution : On sait que les solutions de l'équation:

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\times\beta=0$ sont : $x_1=\alpha$ et $x_2=\beta$

1) $x^2-6x+8=0$

Signifie que : $x^2-(4+2)x+4\times2=0$

C'est-à-dire : $x_1=2$ et $x_2=4$ par suite : $S=\{2;4\}$

2) $x^2-7x+12=0$ signifie que :

$x^2-(3+4)x+3\times4=0$ donc : $x_1=3$ et $x_2=4$

Par suite : $S=\{3;4\}$

3) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}=0$

Signifie que : $x^2-\left(\sqrt{3}+\left(-\sqrt{2}\right)\right)x+\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{2}\right)=0$

C'est-à-dire : $x_1=\sqrt{3}$ et $x_2=-\sqrt{2}$

Par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$

4) $x^2+x-6=0$ signifie que :

$x^2-\left(2+(-3)\right)x+2\times(-3)=0$

C'est-à-dire : $x_1=2$ et $x_2=-3$ Par suite : $S=\{-3;2\}$

5) $4x^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=0$

Signifie que : $x^2+\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$

Signifie que : $x^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)x-\frac{\sqrt{2}}{4}=0$

C'est-à-dire : $x^2-\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)x+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{1}{2}$ et $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right\}$

Exercice13: **(***)** On considère l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

1) On pose : $a=\sqrt{13}-1$ et $b=\sqrt{13}+3$

Vérifier que : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}$ et montrer que :

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

2) Déduire sans calculer le discriminant Δ les solutions de l'équation (E)

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donner une équation du second degré qui a pour solutions: $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$

Solution : 1) a) $a=\sqrt{13}-1$ et $b=\sqrt{13}+3$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+3}=\frac{\left(\sqrt{13}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{13-3\sqrt{13}-\sqrt{13}+3}{13-9}=\frac{16-4\sqrt{13}}{4}=4-\sqrt{13}$$

Montrons que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$

$\left(4-\sqrt{13}\right)^2-8\left(4-\sqrt{13}\right)+3$

$=16-8\sqrt{13}+13-32+8\sqrt{13}+3=0$

Donc : $\frac{a}{b}$ est une solution de l'équation (E)

2) On a : $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8\left(\frac{a}{b}\right)+3=0$:

Donc : $\frac{a}{b}=4-\sqrt{13}=x_1$ est une solution de l'équation (E) : $x^2-8x+3=0$

Soit : x_2 l'autre solution donc : $x_1+x_2=\frac{-(-8)}{1}=8$

c'est-à-dire : $x_2=8-\left(4-\sqrt{13}\right)=4+\sqrt{13}$

3) Soient α et β les solutions de l'équation (E)

Donnons une équation du second degré qui a pour solutions: $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$?

$$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\left(4-\sqrt{13}\right)^2+\left(4+\sqrt{13}\right)^2}{\left(4-\sqrt{13}\right)\left(4+\sqrt{13}\right)}$$

$$S=\frac{4^2-8\sqrt{13}+13+4^2+8\sqrt{13}+13}{16-13}=\frac{58}{3}$$

Et $P=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=1$

Donc : l'équation du second degré est :

$x^2-Sx+P=0$ c'est-à-dire : $x^2-\frac{58}{3}x+1=0$

Ou : l'équation du second degré est :

$3x^2-58x+3=0$

Exercice 14: **(**)** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$$

Solution : méthode1: $\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$ ssi $\begin{cases}x=5-y\\(5-y)\times y=4\end{cases}$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$

C'est-à-dire : $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $y_1 = \frac{5-\sqrt{9}}{2a} = \frac{5-3}{2\times 1} = 1$ et $y_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2a} = 4$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

Méthode2 : Pour résoudre le système :

$(I)\begin{cases} x+y=s \\ x\times y=p \end{cases}$ Où les s , p sont des réels donnés

Il suffit de résoudre l'équation : $x^2-sx+p=0$

Dans notre exercice : on va résoudre l'équation :

$x^2-5x+4=0$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Et on finit de la même façon que la méthode1 .

Exercice 15 : **(***)** Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 56 cm et d'aire 192 cm²?

Réponse : Posons l="la longueur du rectangle"
Et L="la largeur du rectangle"

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 2l+2L=56 \\ l\times L=192 \end{cases}$

Isolons L dans la première équation :
On a : $2l+2L=56$ donc $2L=56-2l$

C'est-à-dire : $L=\frac{56-2l}{2}$ Donc : $L=28-l$

Remplaçons maintenant cette valeur de L dans la deuxième équation.

$l\times L=192$ Donc : $l\times(28-l)=192$

Donc : $28l-l^2=192$ Donc : $-l^2+28l-192=0$
On obtient une équation du deuxième degré.

Calculons delta : $\Delta=28^2-4\times(-1)\times(-192)=16$

L'équation admet donc deux solutions :

$l_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-28-\sqrt{16}}{-2}=\frac{-28-4}{-2}=\frac{-32}{-2}=16$

Et $l_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-28+\sqrt{16}}{-2}=\frac{-28+4}{-2}=\frac{-24}{-2}=12$

Les deux valeurs possibles pour la longueur sont : 16 et 12.
Le produit de ces deux nombres vaut 192
Donc 16 et 12 correspondent bien à la longueur et à la largeur du rectangle.
La longueur de ce rectangle mesure donc 16 cm.

Exercice16 : **(*)** Résoudre l'équation suivante :

$x^2-22x-23=0$ (utiliser le discriminant réduit)

Solution : On a : b = -22 et 22 est pair

$b=-2\times 11$ Donc : $b'=-11$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$
De l'équation :

$\Delta'=b'^2-ac=(-11)^2-1\times(-23)=121+23=144$

Comme $\Delta' > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)-\sqrt{144}}{1}=\frac{11-12}{1}=-1$

Et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)+\sqrt{144}}{1}=\frac{11+12}{1}=23$

Donc : $S=\{-1;23\}$

Exercice 17 : **(***)** En additionnant les âges de Fatima et de Najat on trouve 44. En multipliant leurs âges on trouve 468. Najat est plus jeune que Fatima. Quel âge à Fatima?

Solution : Posons x="l'âge de Najat " et y="l'âge de Fatima ".

x et y vérifient le système : $\begin{cases} x+y=44 \\ x\times y=468 \end{cases}$

De la première équation on tire $y=44-x$ puis en remplaçant cette valeur de y dans la deuxième équation : $x\times y=468$ on obtient : $x\times(44-x)=468$

Donc : $44x-x^2=468$

Donc : $-x^2+44x-468=0$ et On obtient une équation du deuxième degré.

Résolvons cette équation : Calculons delta :

$\Delta=44^2-4\times(-1)\times(-468)=1936-1872=64$

L'équation admet donc deux solutions :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-44-\sqrt{64}}{-2}=\frac{-44-8}{-2}=\frac{-532}{-2}=26$ Et

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-44+-\sqrt{64}}{-2}=\frac{-44+8}{-2}=\frac{-36}{-2}=18$

Si x = 26, alors : $y=44-x=44-26=18$

Et si x = 18 alors : $y=44-x=44-18=26$

Donc 18 et 26 sont les âges de Fatima et de Najat.
Comme Najat est plus jeune que Fatima alors Fatima à 26 ans.

Exercice18 : **(***)** On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

(E) : $x^4-7x^3+16x^2-14x+4=0$

1) a)Vérifier que 0 n'est pas solution de (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

(E') : $X^2-7X+12=0$

2) Montrer que si α est solution de l'équation (E)

alors : $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) En déduire les solutions de l'équation (E)

Solution :1) On a : $0^4-7\times0^3+16\times0^2-14\times0+4=4\neq0$

Donc : 0 n'est pas solution de l'équation (E)

b) (E') : $X^2-7X+12=0$

Calculons delta : $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1$

L'équation admet donc deux solutions :

$X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-1}{2}=3$ et $X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7+1}{2}=4$

Donc : $S=\{3;4\}$

2) Soit α solution de l'équation (E)

Donc : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1)

Donc : $\alpha\neq0$ d'après 1)a)

Montrons que: $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

Il suffit de montrer que :

$\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)+12=0$?

$\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)+12=$

$=\alpha^2+2\alpha\times\dfrac{2}{\alpha}+\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^2-7\alpha-\dfrac{14}{\alpha}+12$

$=\alpha^2+4+\dfrac{4}{\alpha^2}-7\alpha-\dfrac{14}{\alpha}+12=\alpha^2-7\alpha+16+\dfrac{4}{\alpha^2}-\dfrac{14}{\alpha}$

$=\dfrac{\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4}{\alpha^2}$

Et puisque on a : $\alpha^4-7\alpha^3+16\alpha^2-14\alpha+4=0$ (1)

Donc : $\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2-7\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)+12=\dfrac{0}{\alpha^2}=0$

Par suite : $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ est solution de l'équation (E')

3) D'après 1)b) les solutions de l'équation (E) sont les solutions des équations : $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}=3$ et $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}=4$

• $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}=3$ Signifie : $\dfrac{\alpha^2+2}{\alpha}=3$

Signifie : $\alpha^2-3\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-3)^2-4\times2=1$

L'équation (E) admet donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{3-1}{2}=1$ Et $x_2=\dfrac{3+1}{2}=2$

• $\alpha+\dfrac{2}{\alpha}=4$ Signifie : $\dfrac{\alpha^2+2}{\alpha}=4$

Signifie : $\alpha^2-4\alpha+2=0$

Calculons delta : $\Delta=(-4)^2-4\times2=8$

L'équation (E) admet donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$ Et

$x_2=\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

Donc : $S=\{1;2;2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\}$

Exercice19 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant le paramètre m les équations suivantes :

1) $x^2-2x+m-1=0$

2) $(m-1)x^2-2x-1=0$

3) $mx^2-2(m+2)x+m+3=0$

Corrigé :1) $x^2-2x+m-1=0$

C'est une équation du second degré :

$\Delta_m=b^2-4ac=4-4(m-1)=4-4m+4=8-4m$

L'équation admet deux solutions si et seulement si : $\Delta_m>0$

1ére cas : $8-4m>0$ c'est-à-dire : $m\prec2$

Alors l'équation admet deux solutions : :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta_m}}{2a}=\dfrac{2-\sqrt{8-4m}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{2-m}}{2}=1-\sqrt{2-m}$

Et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta_m}}{2a}=\dfrac{2+\sqrt{8-4m}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{2-m}}{2}=1+\sqrt{2-m}$

Par suite : $S=\{1-\sqrt{2-m};1+\sqrt{2-m}\}$

2ére cas : $\Delta_m=8-4m=0$ c'est-à-dire : $m=2$

L'équation devient : $x^2-2x+1=0$

C'est à dire : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

3ére cas : $\Delta_m=8-8m\prec0$ c'est-à-dire : $m\succ2$

L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $S=\varnothing$

2) $(m-1)x^2-2x-1=0$

1ére cas : $m=1$ L'équation devient : $-2x-1=0$ c'est à dire : $x=-\dfrac{1}{2}$ et par suite : $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

2ére cas : $m \neq 1$ c'est une équation du second degré :

$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (-1)\times(m-1) = 1+m-1 = m$

Si : $m = 0$ alors : $\Delta' = 0$

Donc : L'équation admet une solution unique :

$x = \frac{-b'}{a} = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{0-1} = -1$ par suite : $S = \{-1\}$

Si : $m \succ 0$ ($m \neq 1$) alors : $\Delta' \succ 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1-\sqrt{m}}{m-1}$ Et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1+\sqrt{m}}{m-1}$

Par suite : $S = \left\{ \frac{1-\sqrt{m}}{m-1} ; \frac{1+\sqrt{m}}{m-1} \right\}$

Si : $m \prec 0$ alors : $\Delta' \prec 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S = \varnothing$

3) $mx^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

1ére cas : $m = 0$ L'équation devient : $-4x + 3 = 0$

C'est à dire : $x = \frac{3}{4}$ et Par suite : $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$

2ére cas : $m \neq 0$ c'est une équation du second degré :

$\Delta' = b'^2 - ac = (m+2)^2 - m\times(m+3)$

$\Delta' = m^2 + 4m + 4 - m^2 - 3m = m + 4$

Si : $m = -4$ alors : $\Delta' = 0$

Donc : L'équation admet une solution unique :

$x = \frac{-b'}{a} = \frac{m+2}{m} = \frac{-4+2}{-4} = \frac{1}{2}$ par suite : $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Si : $m \succ -4$ ($m \neq 0$) alors : $\Delta' \succ 0$ L'équation admet donc deux solutions :

$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m}$

Et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m}$

Par suite : $S = \left\{ \frac{m+2-\sqrt{m+4}}{m} ; \frac{m+2+\sqrt{m+4}}{m} \right\}$

Si : $m \prec -4$ alors : $\Delta' \prec 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc : $S = \varnothing$

Exercice20 : (***) On considère l'équation : (E_m)

$x^2 - 2x + (2m-1) = 0$

1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour que l'équation (E_m) admette deux solutions distinctes α et β

2) Déterminer la valeur du paramètre m pour que :

a) $\alpha \times \beta = -5$

b) $(\alpha - 1)\times(\beta - 1) = -10$

c) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -42$

Corrigé : 1) C'est une équation du second degré :

$\Delta_m = b^2 - 4ac = 4 - 4(2m-1) = 4 - 8m + 4 = 8 - 8m$

L'équation admet deux solutions distinctes α et β si et seulement si : $\Delta_m \succ 0$

Signifie que : $8 - 8m \succ 0$ c'est-à-dire : $m \prec 1$

2) a) Déterminons la valeur du paramètre m pour que : a) $\alpha \times \beta = -5$:

On sait que : $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{2m-1}{1} = 2m-1$

Donc : $2m - 1 = -5$ qui signifie que : $2m = -4$

C'est-à-dire : $m = -2$

b) $(\alpha - 1)\times(\beta - 1) = -10$

Signifie que : $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = -10$

Signifie que : $\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -10$

Signifie que : $\alpha\beta = 2m - 1$ et $\alpha + \beta = 2$

Donc : $2m - 1 - 2 + 1 = -10$ signifie que : $2m = -8$

c'est-à-dire : $m = -4$

c) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -42$

Signifie que : $\alpha\beta(\alpha + \beta) = -42$

Or on sait que : $\alpha + \beta = 2$ et et $\alpha \times \beta = 2m - 1$

Donc : $2(2m-1) = -42$ équivaut à : $2m - 1 = -21$

Équivaut à : $2m = -20$ c'est-à-dire : $m = -10$

Exercice21 : (*) Résoudre les inéquations suivantes

a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

b) $-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$ c) $3x^2 + 6x + 5 < 0$

Solution : a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1

donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times2\times1 = 9 - 8 = 1 > 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2} = \frac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

b) $-2x^2 + 4x - 2 > 0$

Étudions le signe du trinôme de : $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$

$a = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4\times(-2)\times(-2) = 16 - 16 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double: $x_1 = \dfrac{-(4)}{2\times(-2)} = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $S = \varnothing$

c) $3x^2+6x+5>0$. Étudions le signe du trinôme

$P(x) = 3x^2+6x+5 \quad a = 3 > 0$

$\Delta = b^2-4ac = (6)^2 - 4\times3\times5 = 36-60 = -24 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2+6x+5$	$+$	

Donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice22 : (*) Résoudre les inéquations suivantes

a) $2x^2-4x+6 \geq 0$ b) $4x^2-8x+3 \leq 0$

c) $x^2-3x-10<0$

Solution : a) $2x^2-4x+6 \geq 0 \quad a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6

donc : $\Delta = b^2-4ac = 16-48 = -32 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2-4x+6$	$+$	

Par suite : $S = \mathbb{R}$

b) $4x^2-8x+3 \leq 0 \quad a = 4$

Étudions le signe du trinôme :

$\Delta = b^2-4ac = (-8)^2 - 4\times4\times3 = 64-48 = 16 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{8+4}{2\times4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{8-4}{8} = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$3x^2-4x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

c) $x^2-3x-10<0 \quad \Delta = b^2-4ac = 49 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S =]-2,5[$

Exercice23 : (**) Résoudre les inéquations suivantes :1) $3x^2+6x-9>0$

2) $x^2+3x-5<-x+2$ 3) $\dfrac{2x+6}{x^2-4x-96}<0$

4) $\dfrac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ 5) $\dfrac{3x+9}{6x+2} \geq \dfrac{2x+1}{1-x}$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$.Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est :

$\Delta = 6^2 - 4 \text{ x } 3 \text{ x } (-9) = 36 + 108 = 144$.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont :

$x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{144}}{2\times3} = \dfrac{-6-12}{6} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{144}}{2\times3} = \dfrac{-6+12}{6} = 1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $]-\infty;-3[$ et $]1;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc $S =]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

2) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes du trinôme.

$x^2+3x-5<-x+2$ Équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est

$\Delta = 4^2 - 4 \text{ x } 1 \text{ x } (-7) = 44$ et ses racines sont :

$x_1 = \dfrac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2+\sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2-\sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2+4x-7		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $S =]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}[$.

3) $\dfrac{2x+6}{-x^2+4x+96}<0$

a) On va déterminer le dommaine de définition de l'inéquation:

Cette inéquation est définie si et seulement si $-x^2+4x+96 \neq 0$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2+4x+96$:

Le discriminant de $-x^2+4x+96$ est :

$\Delta = 4^2 - 4 \times 96 \times (-1) = 400$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)} = \frac{-4+20}{-2} = \frac{16}{-2} = -8$$

et $x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)} = \dfrac{-4-20}{-2\times 1} = \dfrac{-24}{-2} = 12$

Donc le tableau des signes est:

x	$-\infty$		-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x^2+4x+96$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+6}{-x^2+4x+96}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left]-8;-3\right[\cup \left]12;+\infty\right[$.

4) $\dfrac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

a) On va déterminer le dommaine de définition de l'inéquation:

Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2-x-6 \neq 0$

On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$

Les racines sont: $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 3$

Alors le dommaine de définition de l'inéquation est : $D_I = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b) Résolvons l'inéquation:

$\dfrac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ Signifie que : $\dfrac{1}{x^2-x-6} - 2 \geq 0$

Signifie que: $\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

On cherche les racines de : $-2x^2+2x+13$

Le discriminant est: $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$

Donc : les racines de $-2x^2+2x+13$ sont :

$x_2' = \dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$ et $x_1' = \dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$

Donc le tableau des signes est:

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation

$\dfrac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est : $S = \left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

5) $\dfrac{3x+9}{6x+2} \geq \dfrac{2x+1}{1-x}$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes : $\dfrac{3x+9}{6x+2} \geq \dfrac{2x+1}{1-x}$

Signifie que : $\dfrac{3x+9}{6x+2} - \dfrac{2x+1}{1-x} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{(3x+9)(1-x)-(2x+1)(6x+2)}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{3x-3x^2+9-9x-12x^2-4x-6x-2}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{-15x^2-16x+7}{(6x+2)(1-x)} \geq 0$

C'est-à-dire : $\dfrac{-(15x^2+16x-7)}{-(6x+2)(x-1)} \geq 0$

Signifie que : $\dfrac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)} \geq 0$

On cherche les racines de: $15x^2+16x-7$

Le discriminant est:

$\Delta = 16^2 - 4 \times (-7) \times 15 = 676 = 26^2$

Donc : les racines de $15x^2+16x-7$:

$x_1 = \dfrac{-16+26}{2\times 15} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-16-26}{2\times 15} = \dfrac{-42}{30} = -\dfrac{7}{5}$

Donc le tableau des signes est:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$15x^2+16x-7$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{15x^2+16x-7}{(6x+2)(x-1)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{7}{5}\right]\cup\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]\cup]1;+\infty[\ .$$

Exercice24 : (***) Soit l'équation

$(E)\ :\ x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ et le polynôme :

$P(x)=x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$

Soit Δ le discriminant du polynôme $P(x)$

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

4) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Solution : $(E)\ :\ x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E):

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc :

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et

$x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

4) Déduction des solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ Peut s'écrire sous la Forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$

On a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ et $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ et $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$

Or l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ n'a pas de solutions

Donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$

On a donc : $S=\{2\}$.

Exercice25 : (**) Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1) $3x^2+6x-9>0$ 2) $\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}\geq0$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$: On cherche d'abord les solutions de l'équation : $3x^2+6x-9=0$

$\Delta=6^2-4\times3\times(-9)=36+108=144$

Donc : $x_1=\dfrac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\dfrac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\dfrac{-6+12}{6}=1$

Donc le tableau des Signes est:

Par suite

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

l'ensemble des solutions est: $S = \left]-\infty\,;-3\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$

2) Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes.

Pour le numérateur : $\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 5 = 1+20 = 21$.

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{21}}{-2} = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \simeq 2,8$$

et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{-2} = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

De même, pour le dénominateur :

$\Delta = 1^2 - 4\times(-5)\times 2 = 1+40 = 41$

Donc : $x_1' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{4} \simeq -1,9$ et

$x_2' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{4} \simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif

donc le dénominateur est négatif entre ses racines.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2+x-5$		$+$	0	$+$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left]\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4};\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left]\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$.

Exercice26 : (**) Quelles sont les solutions de l'inéquation : $3x^2+2x-1 \succ 2x^2+x-3$?

Solution : $3x^2+2x-1 \succ 2x^2+x-3$

Signifie : $3x^2+2x-1-2x^2-x+3 \succ 0$

Signifie : $x^2+x+2 \succ 0$

Pour résoudre cette inéquation, calculons delta :

$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 2 = 1-8 = -7$.

Attention ce n'est pas parce que delta est négatif que cette inéquation n'admet pas de solution.

Le coefficient devant x² (1) est positif donc

Elle est donc toujours positive.

Donc. $S = \mathbb{R}$

Exercice27 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes 1) $x^4-2x^2+1=0$

2) $3x^4-2x^2-1=0$ 3) $x^4-4x^2-21=0$

4) $x^4-8x^2+16=0$

Solution : 1) $x^4-2x^2+1=0$

Faisons un changement de variable en posant :

$X = x^2$ nous obtenons l'équation : $X^2-2X+1=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

La solution double de : $X^2-2X+1=0$

Est : $X = \dfrac{-(-2)}{2\times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$ par suite on a : $x^2 = 1$

Donc : $x=1$ ou $x=-1$ et alors : $S = \{-1;1\}$

2) $3x^4-2x^2-1=0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$

Nous obtenons l'équation : $3X^2-2X-1=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$

Les solutions de : $3X^2-2X-1=0$ sont :

$X_1 = \dfrac{-(-2)+4}{2\times 3} = \dfrac{6}{6} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-(-2)-4}{2\times 3} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3}$

Donc: $x^2 = 1$ et $x^2 = \dfrac{-1}{3}$

Or l'équation : $x^2 = \dfrac{-1}{3}$ n'a pas de solutions

Donc: on a $x=1$ ou $x=-1$ par suite : $S = \{-1;1\}$

3) $x^4-4x^2-21=0$

Faisons un changement de variable en posant :

$X = x^2$

Nous obtenons l'équation : $X^2-4X-21=0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100$

Les solutions de : $X^2-4X-21=0$ sont :

$X_1 = \dfrac{-(-4)+10}{2\times 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-(-4)-10}{2\times 1} = \dfrac{14}{2} = 7$ donc:

$x^2 = 7$ et $x^2 = -3$

Or l'équation : $x^2 = -3$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$ donc : on a $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

Par suite : $S = \{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$

4) $x^4-8x^2+16=0$: Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$

Nous obtenons l'équation : $X^2-8X+16=0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$ la solution double de : $X^2-2X+1=0$ est : $X = \dfrac{-(-8)}{2\times 1} = \dfrac{8}{2} = 4$

Donc on a : $x^2 = 4$ c'est-à-dire $x=2$ ou $x=-2$

Par suite : $S = \{-2;2\}$

Exercice28 : (**) Factoriser les expressions suivantes : 1) x^4-10x^2+25 2) x^4-5x^2+6

Solution : 1) x^4-10x^2+25 On pose : $X=x^2$

Donc : l'équation devient : $X^2-10X+25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

Puisque : $\Delta=0$ alors le trinôme admet une racine double : $x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$ donc : $X=\frac{-(-10)}{2\times1}=5$

Par suite la factorisation est :

$X^2-10X+25=a(X-X_1)^2$

Donc : $X^2-10X+25=(X-5)^2$

Donc : $x^4-10x^2+25=(x^2-5)^2=(x-\sqrt{5})^2(x+\sqrt{5})^2$

2) x^4-5x^2+6 On pose : $X=x^2$

X^2-5X+6 $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$

Donc : $X_1=\frac{-(-5)+1}{2\times1}=3$ et $X_2=\frac{-(-5)-1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

Donc : $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$

Donc : $x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$

Par suite : $x^4-5x^2+4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Exercice29 : (***) A)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $2x^2-3x-2=0$

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

a) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ b) $2x^2-3|x|-2=0$ c) $2x^4-3x^2-2=0$ d) $2x^3-3x^2=2x$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

2) En déduire les solutions de l'équation suivante :

$(E): x^2-|x-2|-4=0$

Solution :A)1) $2x^2-3x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation

$2x^2-3x-2=0$:a = 2, b = -3 et c = - 2

Donc : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=25$.

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times2}=2$ Donc : $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

2) $2x-3\sqrt{x}-2=0$ avec $x\geq0$

$2x-3\sqrt{x}-2=0$ Signifie : $2(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}-2=0$

Car $\sqrt{x}^2=x$ et faisons un changement de variable

En posant : $X=\sqrt{x}$

Nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a : $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Signifie que : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{x}=2$

Mais l'équation : $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$\sqrt{x}=2$ Signifie : $(\sqrt{x})^2=2^2$

C'est-à-dire : $x=4$ et par suite : $S=\{4\}$.

2) b) $2x^2-3|x|-2=0$

Signifie que : $2|x|^2-3|x|-2=0$ car $|x|^2=x^2$

Faisons un changement de variable en posant :

$X=|x|$ nous obtenons l'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a: $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Qui est équivalent à : $|x|=-\frac{1}{2}$ ou $|x|=2$

Mais l'équation : $|x|=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$

$|x|=2$ Signifie que : $x=2$ ou $x=-2$

Par suite $S=\{-2;2\}$

2) c) $2x^4-3x^2-2=0$

Signifie que : $2(x^2)^2-3x^2-2=0$

Faisons un changement de variable

On pose : $X=x^2$ nous obtenons donc :

L'équation : $2X^2-3X-2=0$

Donc : d'après A) 1) on a: $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=2$

Par suite : $x^2=-\frac{1}{2}$ ou $x^2=2$

Mais l'équation : $x^2=-\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions

Dans $\mathbb{R}$

$x^2=2$ Signifie : $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Par suite : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

d) $2x^3-3x^2=2x$ équivalent a: $2x^3-3x^2-2x=0$

Signifie que : $x(2x^2-3x-2)=0$

Signifie que : $x=0$ ou $2x^2-3x-2=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x_1=-\frac{1}{2}$ ou $x_2=2$

Par suite : $S=\left\{-\frac{1}{2};0;2\right\}$.

B) 1) Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

$x^2+x-6=0$ et $x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2+x-6=0$:
a = 1, b = 1 et c = - 6
Donc :$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions
distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=-3$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=2$ Donc : $S=\{-3;2\}$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2-x-2=0$:
a = 1, b = -1 et c = - 2
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions
distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times1}=-1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times1}=2$

Donc : $S=\{-1;2\}$

2) Déduction des solutions de l'équation suivante :
$(E): x^2-|x-2|-4=0$

Etudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ donc : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $x^2-(x-2)-4=0$

Signifie : $x^2-x+2-4=0$

C'est-à-dire : $x^2-x-2=0$

Or: d'après B) 1) $x_1=-1$ et $x_2=2$

Mais : $x_1=-1\notin[2;+\infty[$ donc : $S_1=\{2\}$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\leq 0$

Donc : $|x-2|=-(x-2)=-x+2$

Donc : l'équation devient : $x^2+(x-2)-4=0$

C'est à dire : $x^2+x-2-4=0$

Signifie : $x^2+x-6=0$ Or: d'après B) 1)
$x_1=-3$ et $x_2=2$

Mais : $x_2=2\notin]-\infty;2[$ donc : $S_2=\{-3\}$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\{-3;2\}$.

Exercice30 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
suivante : $x^2-7x-8=0$
2) En déduire les solutions de l'équation suivante :
$x^6-7x^3-8=0$

Solution : 1) Calculons le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=81\succ 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions
distinctes :

$x_1=\frac{7-9}{2}=-1$ et $x_2=\frac{7+9}{2}=8$ donc : $S=\{-1;8\}$

2) $x^6-7x^3-8=0$

Signifie que : $\left(x^3\right)^2-7\left(x^3\right)-8=0$

Faisons un changement de variable en posant :
$X=x^3$ Nous obtenons l'équation : $X^2-7X-8=0$
Donc: d'après 1) on a: $X=-1$ ou $X=8$

Donc : $x^3=-1$ ou $x^3=8$.

Equivalent a: $x=-1$ ou $x=2$ par suite : $S=\{-1;2\}$

Exercice31 : (***) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
suivante : $6x^2-5x+1=0$
2) En déduire les solutions de l'équation suivante :

$$6\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1=0$$

Solution : 1) Calculons le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=25-24=1\succ 0$
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions
distinctes : $x_1=\frac{5+1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Donc : $S=\{-1;8\}$

2) $6\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1=0$

Faisons un changement de variable en posant :
$X=\frac{x+1}{x-1}$ et $x\neq 1$

Nous obtenons l'équation : $6X^2-5X+1=0$

Donc: d'après 1) on a: $X=\frac{1}{2}$ ou $X=\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2}$ ou $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{3}$

Signifie : $2(x+1)=x-1$ ou $3(x+1)=x-1$

Signifie : $2x+2=x-1$ ou $3x+3=x-1$

Signifie : $x=-3$ ou $2x=-4$

Signifie : $x=-3$ ou $x=-2$ Par suite : $S=\{-3;-2\}$

Exercice32 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations
suivantes : 1) $3x|x+1|+x-2=0$

2) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$ 3) $2x|x-1|-|x-2|=0$

Solution :1) $3x|x+1|+x-2=0$

Si $x\geq -1$ alors $x+1\geq 0$ donc : $|x+1|=x+1$

Donc : l'équation devient : $3x(x+1)+x-2=0$ qui

Signifie que : $3x^2+4x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=4+2\times 3=10\succ 0$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$

Mais : $x_1=-1\notin[-1;+\infty[$ donc : $S_1=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

Si $x\leq -1$ alors $x+1\leq 0$ donc : $|x+1|=-x-1$

Donc : l'équation devient : $-3x(x+1)+x-2=0$

Qui signifie que : $-3x^2-2x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$

De l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-6=-5\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions donc : $S_2=\varnothing$.

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\left\{\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

2) $\frac{x|x^2-4|}{|x-2|}=2$: On va déterminer le domaine de définition de l'équation :

Cette l'équation est définie si et seulement si $x-2\neq 0$

$x-2=0$ Signifie : $x^2=4$ c'est-à-dire : $x=2$

Donc : $D_E=\mathbb{R}-\{2\}$

b) Résolvons l'équation :

étudions le signe de : $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Si $x\geq 2$ alors $x-2\geq 0$ par suite : $|x-2|=x-2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{(x-2)}=2$ Signifie que:

$x(x+2)=2$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1+2=3\succ 0$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{3}$

Tous les deux ne sont pas supérieurs à 2

Donc : $S_1=\varnothing$

Si $x\prec 2$ alors $x-2\prec 0$ donc : $|x-2|=-x+2$

Donc : l'équation devient : $\frac{x(x^2-4)}{-(x-2)}=2$

Qui signifie que : $x(x+2)=-2$

C'est-à-dire : $x^2+2x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$

de l'équation : $\Delta'=b'^2-ac=1-2=-1\prec 0$

Comme $\Delta'\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions

Donc : $S_2=\varnothing$

Par suite : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

3) $2x|x-1|-|x-2|=0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$-$		$+$	
$\|x-1\|$		$-x+1$		$-x+1$		$x-1$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\|x-2\|$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	

D'après ce tableau on a trois possibilités

Si $x\prec 1$ alors : l'équation devient :

$2x(-x+1)-(-x+2)=0$

Signifie : $-2x^2+3x-2=0$:

Calculons le discriminant de l'équation :

$\Delta=b^2-4ac=9-16=-7\prec 0$

Donc : $S_1=\varnothing$

Si $1\prec x\leq 2$ alors : l'équation devient :

$2x(x-1)-(-x+2)=0$

Qui signifie que : $2x^2-x-2=0$

Calculons le discriminant de l'équation :

$\Delta=b^2-4ac=1+16=17\succ 0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$

Seulement x_1 vérifie : $1\prec x\leq 2$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Si $x\succ 2$ alors l'équation devient :

$2x(x-1)-(x-2)=0$

Qui signifie que: $2x^2-3x+2=0$

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation : $\Delta=b^2-4ac=-7\prec 0$

Comme $\Delta\prec 0$, l'équation ne possède pas de solutions.

Donc : $S_3=\varnothing$

Par suite : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$