

Correction**Exercice1 :** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

$$1) f(x) = \sqrt{-2x^2 + x + 3}. \quad 2) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2 + x + 3}}. \quad 3) f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}. \quad 4) f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1} \quad 5) h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}.$$

Solution:

$$1) f(x) = \sqrt{-2x^2 + x + 3} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + x + 3 \geq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$\text{Donc on a deux racines : } x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc : } D_f = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$

$$2) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2 + x + 3}}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + x + 3 > 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$\text{Donc : on a deux racines : } x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc : } D_f = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$$

$$3) f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}. \quad D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0\right\}$$

$$-9x+3=0 \text{ Signifie } -9x=-3$$

$$\text{C'est-à-dire : } x = \frac{1}{3} \text{ et } x+1=0 \text{ signifie ; } x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x+3$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	$+$	0	$-$

$$\text{Donc : } D_f = \left]-1, \frac{1}{3}\right]$$

$$4) f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$$

$x^2 + 1 = 0$ Signifie $x^2 = -1$ Cette équation n'admet pas de solution dans \mathbb{R}

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

$$5) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

Signifie : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$

Donc : $D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$

Exercice2 : Soit la fonction f définie par: $f(x) = \frac{x^3}{|x+2| - |x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f

3) Donner une interprétation graphique

Solution: 1) $f(x) = \frac{x^3}{|x+2| - |x-2|} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| - |x-2| \neq 0\}$

$|x+2| - |x-2| = 0$ Signifie $|x+2| = |x-2|$ C'est-à-dire : $x+2 = x-2$ ou $x+2 = -(x-2)$

Signifie $2 = -2$ ou $2x = 0$

C'est-à-dire : $2 = -2$ (pas de solution) ou $x = 0$

Signifie : $x = 0$ Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

2) Etude de la parité de la fonction f

☞ Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$ alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$\text{☞ } f(-x) = \frac{(-x)^3}{|-x+2| - |-x-2|} = \frac{-x^3}{|-(x-2)| - |-(x+2)|} = \frac{-x^3}{|x-2| - |x+2|} \quad \text{car } |-x| = |x|$$

$$f(-x) = \frac{-x^3}{- (|x-2| + |x+2|)} = \frac{x^3}{-|x-2| + |x+2|} = \frac{x^3}{|x+2| - |x-2|}$$

Donc : $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative de f

Exercice3 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Etudier la monotonie de f sur : $I = [-1; +\infty[$ et sur $J =]-\infty; -1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) En déduire les extrémums de f sur \mathbb{R}

6) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Solution: $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Soient : $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-x_2^2 - 2x_2 + 1) - (-x_1^2 - 2x_1 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{-x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_1^2 + 2x_1 - 1}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{-x_2^2 + x_1^2 - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{-(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(-(x_2 + x_1) - 2)}{x_2 - x_1}$$

Par suite : $T(x_1; x_2) = -(x_1 + x_2) - 2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I = [-1; +\infty[$

Soient : $x_1 \in [-1; +\infty[$ et $x_2 \in [-1; +\infty[$ alors $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ implique $x_1 + x_2 \geq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \leq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \leq 0$

Donc $T(x_1; x_2) \leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I = [-1; +\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty; -1]$

Soient : $x_1 \in]-\infty; -1]$ et $x_2 \in]-\infty; -1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ cela implique $x_1 + x_2 \leq -2$

Donc $-(x_1 + x_2) \geq 2$ par suite : $-(x_1 + x_2) - 2 \geq 0$

Donc $T(x_1; x_2) \geq 0$

D'où : f est croissante sur $J =]-\infty; -1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

Donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

5) $f(-1) = 2$ est un maximum de f sur \mathbb{R}

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ signifie } -x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-(-2) + 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-(-2) - 2\sqrt{2}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$$A(-1 - \sqrt{2}; 0) \text{ et } B(-1 + \sqrt{2}; 0)$$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

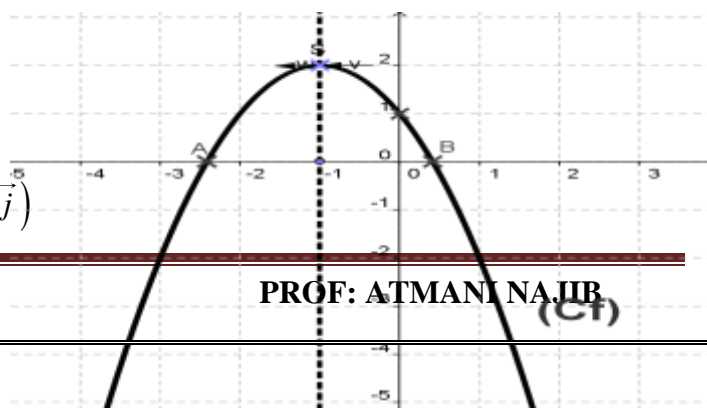
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

$$\text{Et on a } f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec

l'axe des ordonnées est : $C(0; 1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



-4	-3	-2	-1	0	1	2
-7	-2	1	2	1	-2	-7

Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que: $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$

- 1) Déterminer D_f et déterminer α et β tel que : $f(x) = 2(x-\alpha)^2 + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- 2) Déterminer les éléments caractéristiques de (C_f)
- 3) Déterminer le Tableau de variations de f
- 4) En déduire les extrémums de f sur \mathbb{R}

Solution: $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 7 = 2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2) + 7$$

$$f(x) = 2((x-1)^2 - 1) + 7 = 2(x-1)^2 - 2 + 7$$

Donc ; $f(x) = 2(x-1)^2 + 5$ par suite : : $\alpha = 1$ et $\beta = 5$ et $a = 2$

2) les éléments caractéristiques de (C_f) :

la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;5)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$.

3) Le Tableau de variations de f : On a $a = 2 > 0$

Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

4) $f(1) = 5$ est un minimum de f sur \mathbb{R}

Exercice5 : Soient f et g les deux fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 3 \text{ et } g(x) = 2x$$

- 1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et Déterminer les éléments caractéristiques de (C_f) et déterminer le Tableau de variations de f
- 2) Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g)
- 3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$
- 4) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x) > g(x)$
- 5) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Solution: $f(x) = -x^2 + 4x + 3$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = -1(x^2 - 4x) + 3 = -1(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2) + 3$$

$$f(x) = -1((x-2)^2 - 4) + 3 = -1(x-2)^2 + 4 + 3$$

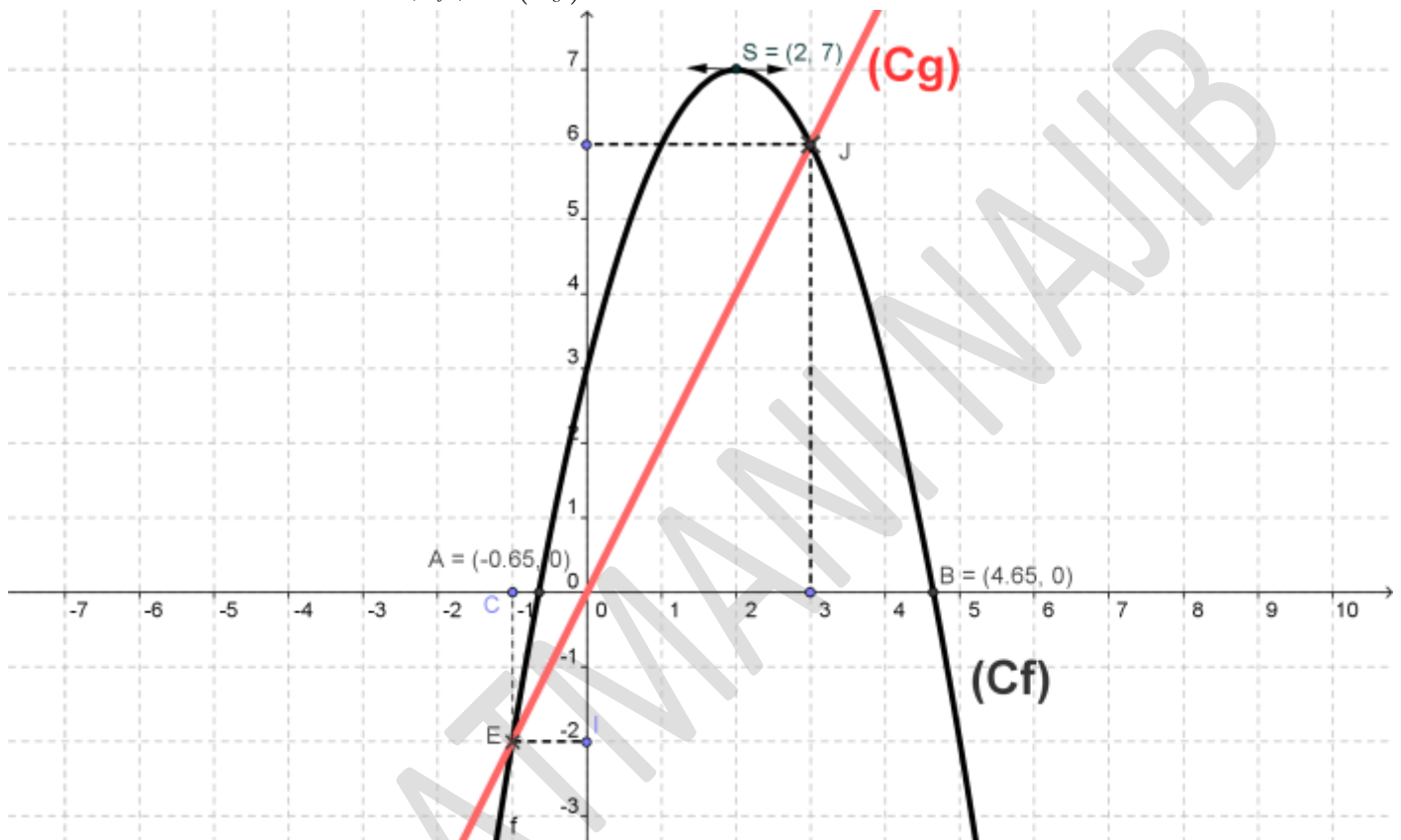
Donc ; $f(x) = -1(x-2)^2 + 7$ par suite : : $\alpha = 2$ et $\beta = 7$ et $a = -1$

Le Tableau de variations de f : On a $a = -1 < 0$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow 7 \searrow$		

2) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :



3) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -1$ et $x = 3$ donc $S = \{-1; 3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ signifie : $-x^2 + 4x + 3 = 2x$ c'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1$ et $b = 2$ et $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$

Donc : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

et $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$ Donc : $S = \{-1; 3\}$

4) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-1;3[$

Donc $S =]-1;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > g(x)$:

$$f(x) > g(x) \text{ Signifie } -x^2 + 4x + 3 > 2x$$

$$\text{C'est-à-dire : } -x^2 + 2x + 3 > 0$$

Les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-x^2 + 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $S =]-1;3[$

5a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \text{ Signifie } -x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 + 12 = 28 > 0$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 + \sqrt{4 \times 7}}{-2} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2(2 - \sqrt{7})}{-2} = 2 - \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 - \sqrt{4 \times 7}}{-2} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2(2 + \sqrt{7})}{-2} = 2 + \sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$$C(2 - \sqrt{7}; 0) \text{ et } D(2 + \sqrt{7}; 0)$$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

$$\text{Et on a } f(0) = -0^2 + 4 \times 0 + 3 = 3$$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$