PROF: ATMANI NAJIB **DLN°4** Tronc commun Sciences BIOF

http://www.xriadiat.com

Correction du devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°4

Sur la trigonométrie :

Exercice1 : Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des points suivants

$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Solution :

▪ $x=\frac{9\pi}{2}$ *Methode1:*

$\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Methode2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{9}{2}+2k\leq 1$

C'est-à-dire : $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\leq 1-\frac{9}{2}$

Donc : $-\frac{11}{2}<2k\leq-\frac{7}{2}$ par suite : $-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}$

Donc : $-2,7\simeq-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}\simeq-1,7$ et $k\in\mathbb{Z}$

c'est-à-dire : $k=-2$

Par suite : $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

▪ $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi-\pi}{3}=4\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\times 2\pi$

et $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est: $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

Methode2: $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{11}{3}+2k\leq 1$

Par suite : $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\leq 1-\frac{11}{3}$

Donc : $-\frac{14}{3}<2k\leq-\frac{8}{3}$ par suite : $-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{4}{3}$

Donc : $-2,3\simeq-\frac{7}{3}<k\leq-\frac{4}{3}\simeq-1,3$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=-2$ par suite :

$\alpha=\frac{11\pi}{3}+2(-2)\pi=\frac{11\pi}{3}-4\pi=\frac{11\pi-12\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_1 est : $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

▪ $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a

$\frac{67\pi}{3}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times 8\pi+\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Methode2: $-\pi<\frac{67\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{67}{4}+2k\leq 1$

Donc $-1-\frac{67}{4}<-\frac{67}{4}+\frac{67}{4}+2k\leq 1-\frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4}<2k\leq-\frac{63}{4}$

C'est-à-dire : $-8,8\simeq-\frac{71}{8}<k\leq-\frac{63}{8}\simeq-7,8$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=-8$ c'est à dire :

$\alpha=\frac{67\pi}{4}+2(-8)\pi=\frac{67\pi}{4}-16\pi=\frac{67\pi-64\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_2 est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

PROF:ATMANI NAJIB

Exercice2 : Calculer : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ et $C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$

$D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Solution :

$A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A=\cos\left(6\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=-\cos\frac{\pi}{4}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$

$+C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\sin\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1=-\sin\frac{\pi}{3}+1$

Donc : $C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$D=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$D=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice3: On a : $\sin x=-\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ c'est à dire : $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$

C'est à dire : $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$ or $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos x\geq 0$ et par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

Et on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$

Exercice4: Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Solution :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times 7\pi-x)$

$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$

$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

PROF:ATMANI NAJIB

$$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

On a $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

$$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Et on a $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$$H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$$

$$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

$$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$K=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)+\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$$

Donc : $K=1+1=2$

Exercice5 : On pose : $A(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Solution : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$$

$$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Exercice 6 : Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$A=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+\cos(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Solution : $A=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

$$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$$

Donc : $B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$$

On remarque que : $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ donc : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$ Et on a : $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

et $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

Donc on a :

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Et on remarque que : $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

$$C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$$

Exercice7 : simplifier les expressions suivantes :

$$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$$

$$B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$$

$$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$$

Solution : $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$A=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

$A=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x)=2\times1=2$

$B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$B=\cos^4 x-\cos^2 x-\sin^4 x+\sin^2 x$

Donc : $B=\cos^2 x(\cos^2 x-1)-\sin^2 x(\sin^2 x-1)$

On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x-1=-\sin^2 x$ et $\sin^2 x-1=-\cos^2 x$

$B=\cos^2 x\times(-\sin^2 x)-\sin^2 x(-\cos^2 x)$

$B=-\cos^2 x\times\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x=0$

$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x=(\sin^2 x)^2-(\cos^2 x)^2+2\cos^2 x$

$C=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)+2\cos^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

Donc : $C=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)+$

$+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$

$D=2\sin^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x$

$D=2(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=2\times1=2$

Exercice8: 1) Simplifier l'expression suivante :

$A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre :

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}.$$

b) En déduire la valeur de A si $\tan x=3$

Solution :1)

$A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(2\pi+\pi+x)+\sin\left(x-4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos x-\cos x+\cos x=\cos^2 x-\cos x$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$:

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3)a)Calcul en fonction de : $\sin x$ le nombre :

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$A=\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Donc : $A=\frac{\sin^2 x\cos x}{-\cos x}=-\sin^2 x$

b) Déduction de la valeur de A si $\tan x=3$

On sait que : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x\tan^2 x=\sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}\tan^2 x$

Et puisque : $\tan x=3$ alors :

$$A=-\sin^2 x=-\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\frac{9}{1+9}=-\frac{9}{10}.$$

PROF:ATMANI NAJIB

Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

Solution: a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a : $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire :

$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 10: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$

Solution: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et

$\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 11: 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\tan x = \sqrt{3}$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante : $\tan x = \sqrt{3}$

Solution: 1) on a : $\tan x = \sqrt{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$ ssi $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec ; $k \in \mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ssi $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$ ssi

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation: $\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3}$ ssi $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Donc les seules valeurs dans $]-\pi\,;\pi]$ sont : $x = \frac{\pi}{3}$ et

$x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

Par suite : $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

Exercice12 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

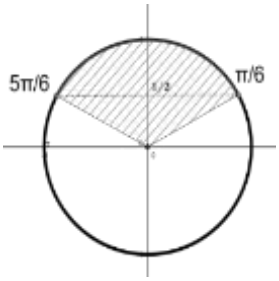
Et puisque : $x \in [0; 2\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$

On trouve que : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

Donc : $S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$



Exercice13: Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Solution: $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

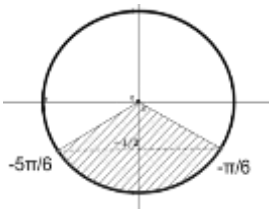
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$

$\sin x \leq -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x \leq -\sin\frac{\pi}{6}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$



On trouve que : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Donc $S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice14 : Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

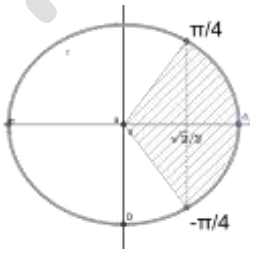
Solution : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x \geq \cos\frac{\pi}{4}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$



On trouve que : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Donc : $S = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Exercice15: Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ l'inéquation suivante : $\cos x \leq \frac{1}{2}$

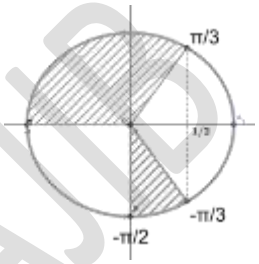
Solution : $\cos x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors : $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{3}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare **:** $\cos x$ et $\frac{1}{2}$



Dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ On trouve que :

$S = \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

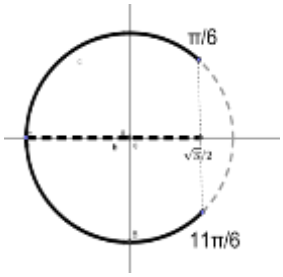
Exercice16: Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors :

$x = \frac{11\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ (on utilisant les encadrements)



$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à :

$\cos x < \cos\frac{\pi}{6}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $S = \left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

Exercice17: Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à :

$\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

PROF:ATMANI NAJIB

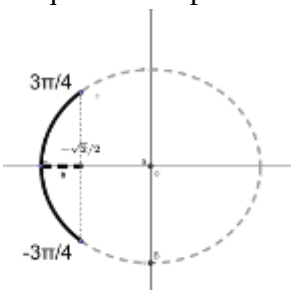
Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{3}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\cos x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Dans : $]-\pi;\pi]$

on trouve que :



$S = \left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Exercice18 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à :

$\sin x = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

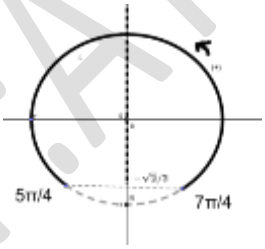
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\sin x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;2\pi]$



On trouve que : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Équivaut à :

$x \in \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Donc : $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice19: Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :

1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

Solution : on utilise le cercle trigonométrique

1) $S = \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

2) $S = [0,\pi]$

Exercice20 : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

Solution:1) a) On pose $t = \sin x$ et l'équation $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ devient :

$2t^2 - 9t - 5 \leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant :

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$

Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

Équivaut à : $\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08 \leq k \leq 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

Donc $0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

Donc $-0,5 \leq k \leq 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$

$S = \left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$

PROF:ATMANI NAJIB