Correction du devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur

Le PRODUIT SCALAIRE

<u>Exercice1</u> : Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\frac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.

I un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I

et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure.

2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC .

3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$

4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$

5) Calculer : AJ

Solution :1)

2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$

Donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

Donc : $AB^2=64$ c'est-à-dire : $AB=8$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $BC^2=64+64-2\times 64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ c'est-à-dire : $BC=\sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times 64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ c'est-à-dire : $40=AJ^2$

Donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

<u>Exercice2</u> : (**) Soit ABC un triangle isocèle en B tel que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ et $\cos(AB\hat{C})=\frac{1}{3}$ et J un point tel que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$ et soit la droite (Δ) qui passe par J

et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

Et soit $M \in (\Delta)$

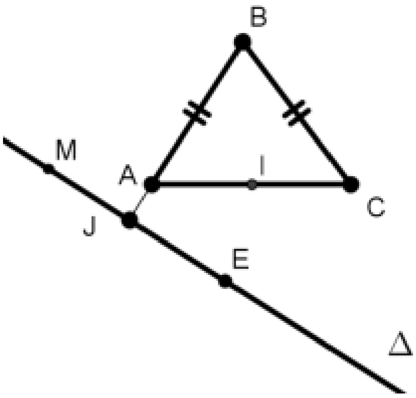
1) Montrer que : $AB = 6$ et calculer AC

2) Calculer : $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 45$

4) Calculer : BI

Solution :



1) On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$

Donc : $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos \hat{B} = 12$

Donc : $BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12$

C'est-à-dire : $AB^2 \times \dfrac{1}{3} = 12$

Donc : $AB^2 = 36$ c'est-à-dire : $AB = 6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$

Donc : $AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \dfrac{1}{3}$

Donc : $AC^2 = 54$ c'est-à-dire : $AC = \sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2 = \dfrac{5}{4}BA^2 = \dfrac{5}{4} \times 36 = 45$

4) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{BJ}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = 45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \dfrac{1}{2}AC^2$

Donc : $6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72 = 2BI^2 + 27$ c'est-à-dire : $BI^2 = \dfrac{45}{2}$

Par suite : $BI = \sqrt{\dfrac{45}{2}}$

Exercice3 : Soit ABC un triangle tel que

et $AB = 2\sqrt{2}$ et $AC = 3$ et $BAC = \frac{\pi}{4}$

1) a)Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) En déduire la distance BC

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$

Calculer la distance AI

3) Soit J le milieu du segment $[AB]$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$

4) Soit K tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Montrer que les droites : (IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Solution : 1) a)Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2} \times 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

b) Déduction de la distance BC ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 8 + 9 - 12 = 5$ Par suite : $BC = \sqrt{5}$.

2) Calculons la distance AI : On a I le milieu du segment $[BC]$ d'après le théorème de la médiane dans

ABC on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(8 + 9 - \frac{5}{2}\right) = \frac{29}{4}$

Par suite : $AI = \frac{\sqrt{29}}{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$

On a : J le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}8 = 4$

4) On a : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\right) \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\right) \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{IJ}$

Et puisque : I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AB]$ Alors : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^{2}=\frac{6}{2}-\frac{9}{3}=3-3+0$

Et puisque : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ alors les droites : (IJ)

Et (BK) sont perpendiculaires.

Exercice4 : Soit ABC un triangle tel que $AB=1$ Et $BC=AC=\sqrt{2}$

I Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

1) Calculer CI

2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$

Et en déduire $\cos BAC$.

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD

6) Soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

Solution :1) a)D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}=CI^2$

Donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$et ABC isocèle en C donc : $(IC)\perp(AB)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos 0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Calcul de $\cos BAC$: On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$

Donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$$=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ ؟؟؟

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

6) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$

$$=-\frac{7}{4}\cdot2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MD)\perp(AC)$

<u>Exercice5</u> : Soit $ABCD$ un quadrilatère
tel que : $AB=AD$ et $CD=CB$

1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

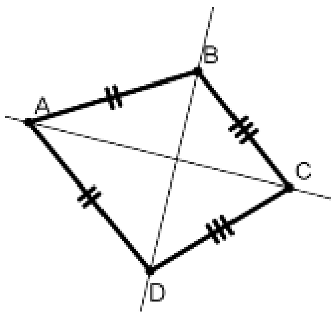
2) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) Nous prenons dans cette question : $AB=AD=3cm$ et $\left(\overline{BAD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

a)Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1)



1) Montrons que : $(AC)\perp(BD)$?

Puisque : $AB=AD$ et $CD=CB$ alors les points A et C appartiennent à la médiatrice (AC) du segment $[BD]$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

Or $(AC)\perp(BD)$ donc : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) a)Calculons : BD ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos BAD$

Donc : $BD^2 = 18 - 18\cos\frac{\pi}{4} = 9\left(2-\sqrt{2}\right)$

D'où : $BD = \sqrt{9\left(2-\sqrt{2}\right)} = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) En déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$: soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD

Donc : $\left(\overline{BAI}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I

Donc : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice6 : Soit $ABCD$ un carré de centre I et a la longueur de son côté ; on construit à l'extérieur un triangle équilatérale BCE
(Voir figure)

1) Soit J le milieu du segment $[AD]$ et K le milieu du segment $[BC]$

Calculer $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a

2) a)Montrer que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

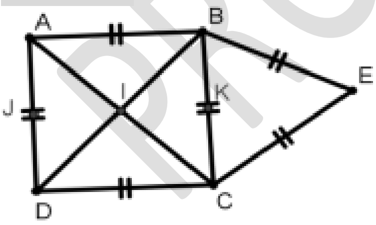
b) En déduire que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) En utilisant les résultats de la question

Montrer que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Et en déduire: $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$

Solution :



1) Calcul de $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}$ en fonction de a

On a : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}\bullet\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC}$

Et puisque : $(IJ) \perp (KC)$ alors : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{KC} = 0$

Et puisque : I le milieu de $[JK]$ alors : $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IJ}\bullet\left(-\overrightarrow{IJ}\right)=-\overrightarrow{IJ}^{2}=-IJ^{2}$

Donc : $\overrightarrow{IJ}\bullet\overrightarrow{IC}=-\frac{a^{2}}{4}$ car $IJ=\frac{a}{2}$

2) a)Montrons que : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^{2}$

• Montrons d'abord que les points : I ; K et E sont alignés ?
On a : $EC=EB$ et $IC=IB$ car $ABCD$ un carré
Et on a: $KC=KB$ car K le milieu du segment $[BC]$

Donc : les points : I ; K et E appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : I ; K et E sont alignés
• On a : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}\right)\bullet\overrightarrow{IE}$ Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Et puisque : $(KB)\perp(IE)$ alors : $\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}=0$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos(0)=IK\times IE$

Car $\cos(0)=1$ Or on a : $IK=\frac{a}{2}$

et $IE=IK+KE=IK+\sqrt{CE^{2}-CK^{2}}$

Donc : $IE=\frac{a}{2}+\sqrt{a^{2}-\frac{a^{2}}{4}}=\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}a$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a\times a=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^{2}$

b) Déduction que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^{2}$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}\bullet\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}^{2}+\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}=BI^{2}+\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}$
Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI^{2}-\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$
Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=KI^{2}+KB^{2}-\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$ car $BI^{2}=KI^{2}+KB^{2}$
(le triangle IKB est rectangle en K)
($KI=KB=\frac{a}{2}$)

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=2\left(\frac{a}{2}\right)^{2}-\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^{2}$ $\frac{a}{2}$

Par suite : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^{2}$

3) Montrons que : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI\times BE\cos\left(\widehat{IBE}\right)$

Donc : $\cos\left(IBE\right) = \dfrac{\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE}}{BI \times BE}$

Et on a : $IBE = IBC + CBE = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}$

Et on a $BI = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a$ et $BE = a$ et $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right) a^2$

Donc : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right) a^2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} a^2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Déduction de : $\sin\dfrac{7\pi}{12}$?

On a : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12} + \cos^2\dfrac{7\pi}{12} = 1$ donc : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12} = 1 - \cos^2\dfrac{7\pi}{12} = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{8-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$ Donc :

$\sin^2\dfrac{7\pi}{12} = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Par suite : $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\dfrac{7\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $0 \prec \dfrac{7\pi}{12} \prec \pi$ donc : $\sin\dfrac{7\pi}{12} \geq 0$

Par suite : $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

calcul de : $\tan\dfrac{7\pi}{12}$?

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{6}^2} = \frac{8+2\sqrt{12}}{-4} = -2-\sqrt{3}$$