**Correction du devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°6 sur**

# Les Transformations du plan

**Exercice 1 :** On considère deux points $A$ et $B$ tels que : $AB = 3cm$.

Et nous considérons la translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme respectivement les points : $A$ , $B$, $C$ et $D$ en $A'$ , $B'$ ; $C'$ et $D'$ et sachant que : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$

Calculer : $C'D'$ .

**Solution :** On a : $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ et la translation $t_{\vec{u}}$ transforme respectivement les points : $A$ , $B$, $C$ et $D$ en $A'$ , $B'$ ; $C'$ et $D'$ et puisque : la translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{C'D'} = -2\overrightarrow{A'B'}$

Donc : $C'D' = 2A'B'$

D'autre part puisque : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = A'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ Alors d'après la propriété caractéristique de la translation on a : $A'B' = AB = 3cm$

Par suite : $C'D' = 2\times 3cm = 6cm$.

**Exercice 2 :** Déterminer dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie $h$ de centre $A$ qui transforme $B$ en $C$

1) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AB}$

**Solution**: Soit $h(A,k)$ l'homothétie $h$ de centre $A$ et de rapport k et $h(B) = C$

$h(B) = C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

1) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Équivaut à : $k = \frac{3}{2}$ donc $h\left(A, \frac{3}{2}\right)$

2) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k = -2$ donc $h(A,-2)$

**Exercice 3:** Soient $A$ et $B$ deux points fixes du plan .soit $T$ une transformation du plan qui transforme chaque point $M$ en $M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$

Montrer que $T$ est une homothétie de centre $I$ le milieu du segment $[AB]$ et déterminer son rapport k

**Solution :** pour chaque point $M$ du plan nous avons : $T(M) = M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'} = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{MI}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{MI} + 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)$ or on a : $I$ le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'} = -3\overrightarrow{IM}$

Cela veut dire que : $h$ est une homothétie de centre $I$ le milieu du segment $[AB]$ et de rapport $k = -3$

**Exercice 4 :** Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $(AB)\parallel(CD)$ et tels que : $AB=2$ et $CD=4$
1) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie $h$ qui transforme $A$ en $D$
et transforme $B$ en $C$.
2) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie $h'$ qui transforme $A$ en $C$
et transforme $B$ en $D$

**Solution :1)** Soit $h(E,k)$ : on a : $h(A)=D$

Donc : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$
Donc : les points $E$ ; $A$ et $D$ sont alignés
Par suite : $E\in(AD)$

Et on a : $h(B)=C$ donc : $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$
Donc : les points $E$ ; $B$ et $C$ sont alignés
Par suite: $E\in(BC)$

Donc le centre de l'homothétie $h$ est le point $E$ d'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle $EDC$

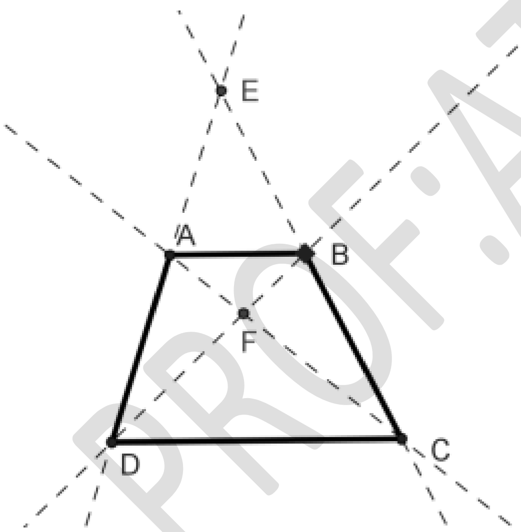
On a : $\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$ alors : $\|\overrightarrow{ED}\|=\|k\overrightarrow{EA}\|$

C'est-à-dire : $ED=|k|EA$ donc : $\frac{ED}{EA}=|k|$

Et par suite : $|k|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le même sens alors : $k=2$

Par conséquent : $h(E,2)$




2) Soit $h'(F,k')$

On a : $h'(A)=C$ donc : $\overrightarrow{FC}=k'\overrightarrow{FA}$

Donc : les points $F$ ; $A$ et $C$ sont alignés par suite : $F\in(AC)$

Et On a : $h'(B)=D$ donc : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$

Donc : les points $F$ ; $B$ et $D$ sont alignés par suite: $F\in(BD)$

Donc le centre de l'homothétie $h'$ est le point $F$ d'intersection des droites $(AC)$ et $(BD)$

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle $EDC$

On a : $\frac{FD}{FA}=\frac{FC}{FB}=\frac{DC}{AB}=\frac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$ alors : $\left\|\overrightarrow{FD}\right\|=\left\|k'\overrightarrow{FB}\right\|$

c'est-à-dire : $FD=|k'|FB$ donc : $\frac{FD}{FB}=|k'|$

Et par suite : $|k'|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le sens contraire alors : $k'=-2$

Par conséquent : $h'(F,-2)$

**Exercice 5:** $ABC$ un triangle et $D$ un point tel que : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $I$ est le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(AC)$ (Voir la figure)

On considère l'homothétie $h$ de centre $I$ qui transforme le point $A$ en $C$.

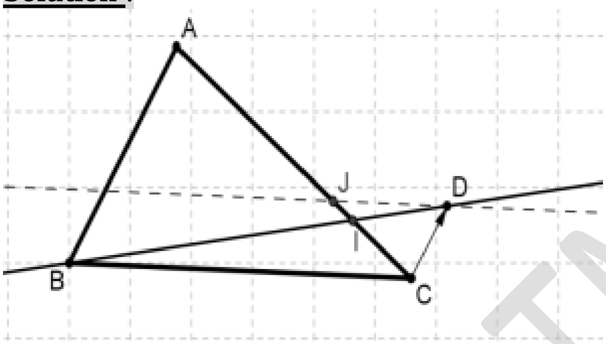
1) a)Déterminer l'image du point $B$ par l'homothétie $h$

b) En déduire le rapport k de l'homothétie $h$.

2) La droite qui passe par $D$ et parallèle à $(BC)$ coupe la droite $(AI)$ en $J$.

Montrer que $h(C)=J$ .

**Solution** :




1)a) On a de $I$ qui transforme le point $A$ en $C$

Et on a : $h((BI))=(BI)$ car $I\in(BI)$ et $I$ est le centre l'homothétie $h$

On a aussi : $h(A)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc l'image de la droite $(AB)$ est la droite qui passe par l'image de $A$ qui est $C$ et parallèle a $(AB)$

Donc : $h((AB))=(CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$

Donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$

C'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie $h$ ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) On a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et $I$ est le centre l'homothétie $h$

On a aussi : $h(B)=D$ donc l'image de la droite $(BC)$ est la droite qui passe par l'image de $B$ qui est $D$ et parallèle a $(BC)$

Donc : $h((BC))=(DJ)$

On a : $C\in(BC)\cap(CI)$

Donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$

C'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$