

**Cours : Etude de fonctions Avec Exercices avec solutions**

**Présentation globale**

**I) Asymptotes à une courbe**

**II) Etude d'une fonction polynôme**

1) Etude d'une fonction polynôme :  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$

2) Etude d'une fonction polynôme :  $x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$

III) Etude d'une fonction homographique :  $x \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d}$

## ETUDE DE FONCTIONS

**I) asymptotes à une courbe :**

• Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  alors la courbe (C)

admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$

• Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  alors la courbe admet une asymptote horizontale

d'équation  $y = b$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$  et

(Donner une interprétation géométrique des résultats)

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

1)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^-$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$3x-6$	$-$	$0$	$+$

**Donc :**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite ( $\Delta$ ) :  $x = 2$  est une asymptote verticale a la courbe  $C_f$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite ( $\Delta$ ) :  $y = \frac{2}{3}$  est une asymptote horizontale a la courbe  $C_f$

## II) Etude d'une fonction polynôme

1) Etude d'une fonction polynôme :  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$

**Exemple 1** : Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^2 + 4x + 3$

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Calculer :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x)$
- 4) Etudier le signe de  $f'(x) \forall x \in D_f$
- 5) En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$  et donner le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$
- 6) Déterminer les points d'Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses.
- 7) Déterminer les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées
- 8) Tracer la courbe représentative  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 9) Tracer la droite  $(D)$  d'équation :  $(D): y = 3$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 10) Déterminer les points d'Intersection de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D)$
- 11) Résoudre graphiquement dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $x^2 + 4x \geq 0$

### Solutions :

1) On a :  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$  car  $f$  est une fonction polynôme

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = \boxed{2x + 4}$$

4) Etude du signe de  $f'(x) : \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$2x+4$	$-$	$0$	$+$

Donc :  $f$  est une fonction strictement croissante dans  $[-2; +\infty[$

Et  $f$  est une fonction strictement décroissante dans  $] -\infty; -2]$

### Le tableau de variations de $f$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$

6) Les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

$$f(x) = 0 \text{ Signifie } x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Donc les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$  et  $D(-3;0)$

7) Le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

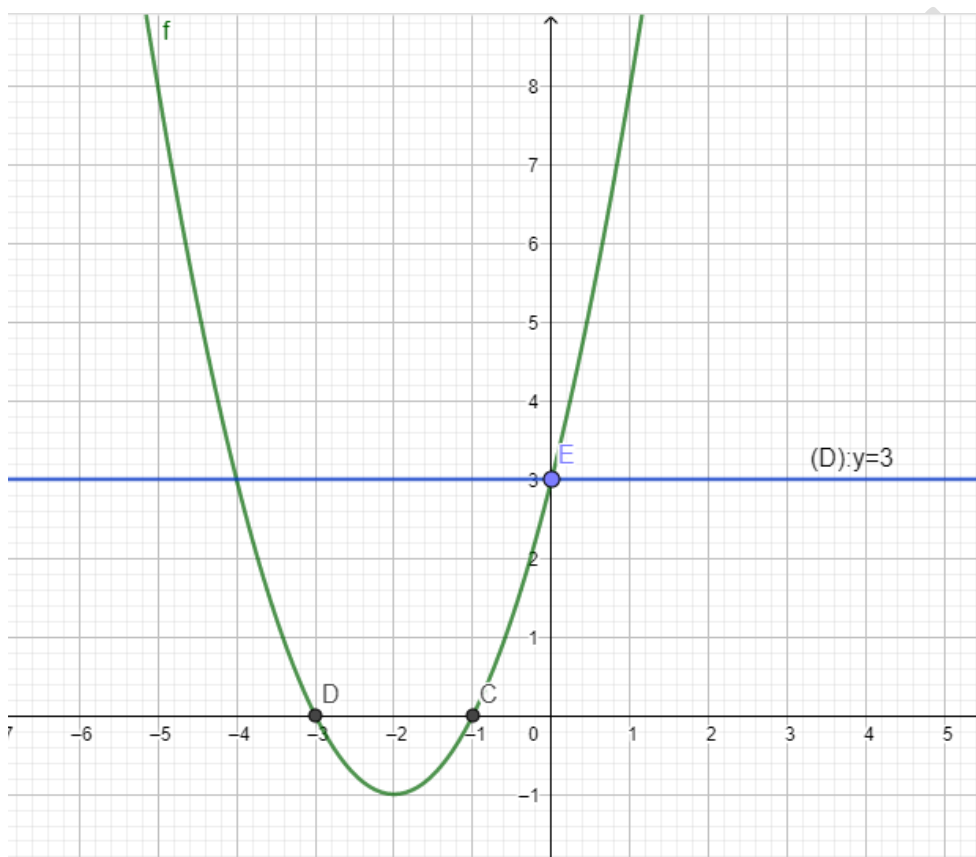
Et on a  $f(0) = 0^2 + 4 \times 0 + 3 = 3$

Donc le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est :  $E(0;3)$

8) Tracer la courbe représentative  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Pour construire la courbe représentative  $(C_f)$  on va d'abord dresser un tableau des valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



10) Pour déterminer les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D): y = 3$

On va résoudre l'équation :  $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4$$

Donc les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  et la droite  $(D): y = 3$  sont :

$A(0;3)$  et  $B(-4;3)$

11) Résolution graphique dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $x^2 + 4x \geq 0$

$$x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \geq 0 + 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$$

La courbe  $(C_f)$  est au-dessus de  $(D)$  si  $x \in ]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$

$$\text{Donc } S = ]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$$

**2) Etude d'une fonction polynôme :**  $x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$

**Exemple2 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x + 3$

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Calculer :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x)$
- 4) Etudier le signe de  $f'(x) \forall x \in D_f$
- 5) En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$  et donner le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$
- 6) Tracer la courbe  $C_f$

**Solution :** 1) On a :  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$  car  $f$  est une fonction polynôme

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R} f'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x-1)(x+1)$

$$(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$$

Le tableau de signe est le suivant :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad a = 3 > 0$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x) = 3x^2 - 3$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

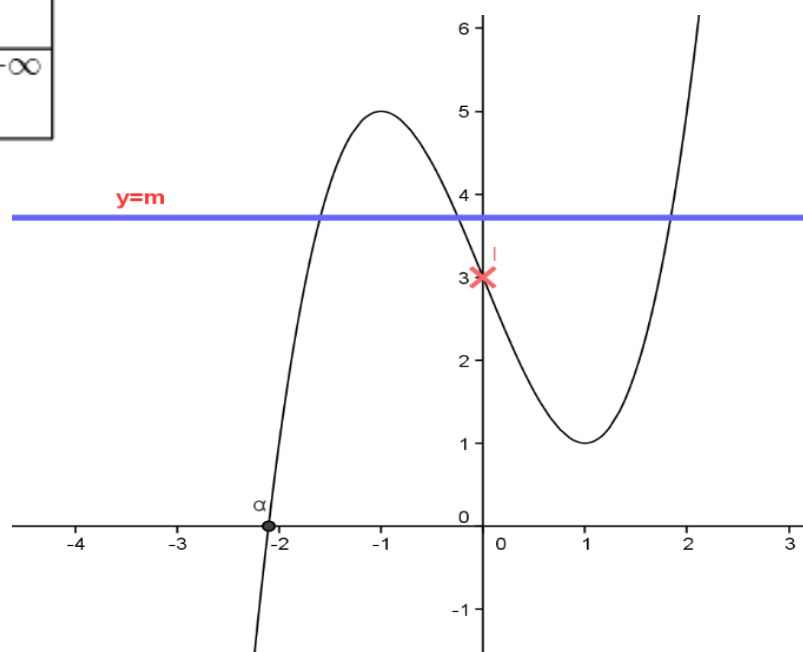
5) Donc :  $f$  est une fonction strictement croissante dans  $]-\infty; -1]$  et sur  $[1; +\infty[$

Et  $f$  est une fonction strictement décroissante dans  $[-1; 1]$

6) Le tableau de variation de  $f$  est :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$5$	$1$	$+\infty$	

6)



### III) Etude d'une fonction homographique : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1) Déterminer  $D_f$

2) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

3) Donner une interprétation géométrique de ces limites

4) Calculer :  $\forall x \in D_f ; f'(x)$  et Etudier le signe de  $f'(x) \forall x \in D_f$

5) En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$  et donner le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$

6) Tracer la courbe  $C_f$

**Solution : 1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\}$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1}$$

**On a :**  $\lim_{x \rightarrow -1^+} 2x+1 = 2(-1)+1 = -2+1 = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = -1+1 = 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$0$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x+1 = -1$$

**Donc :**  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x+1 = -1$$

**Donc :**  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

3) Interprétation géométrique des résultats :

a) On a :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

La droite  $(\Delta_1)$ :  $x = -1$  est une asymptote vertical a la courbe  $C_f$

a) On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

La droite  $(\Delta_2)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$

4) Calculer :  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[ ; f'(x) = \left( \frac{2x+1}{x+1} \right)'$

On utilise la formule :  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left( \frac{2x+1}{x+1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x+1) - (2x+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 1 \times (2x+1)}{(x+1)^2}$$

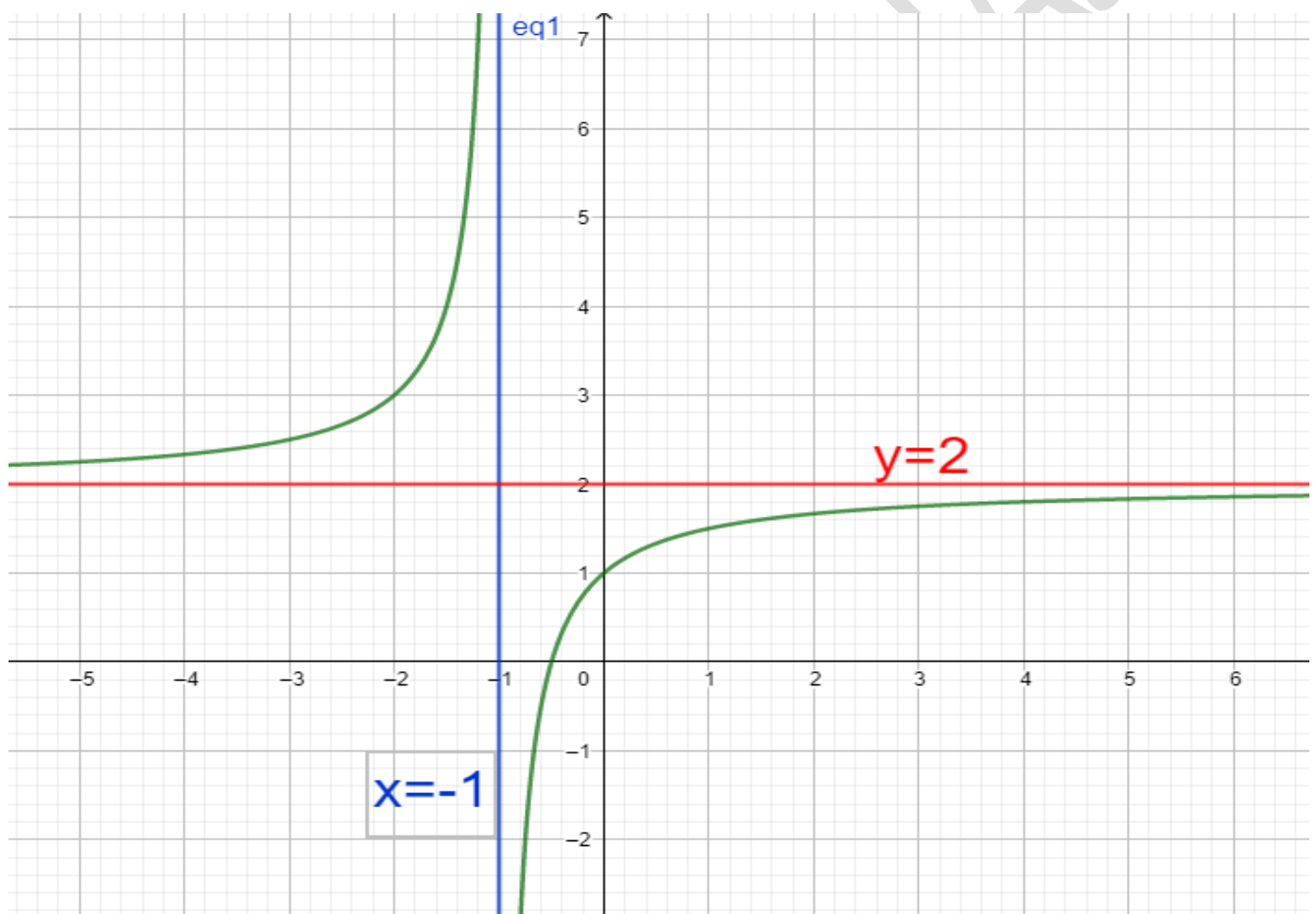
$$f'(x) = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

5) Donc :  $f$  est une fonction strictement croissante dans  $]-\infty; -1[$  et sur  $]-1; +\infty[$

Le tableau de variation de  $f$  est :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

6) Tracer la courbe  $C_f$



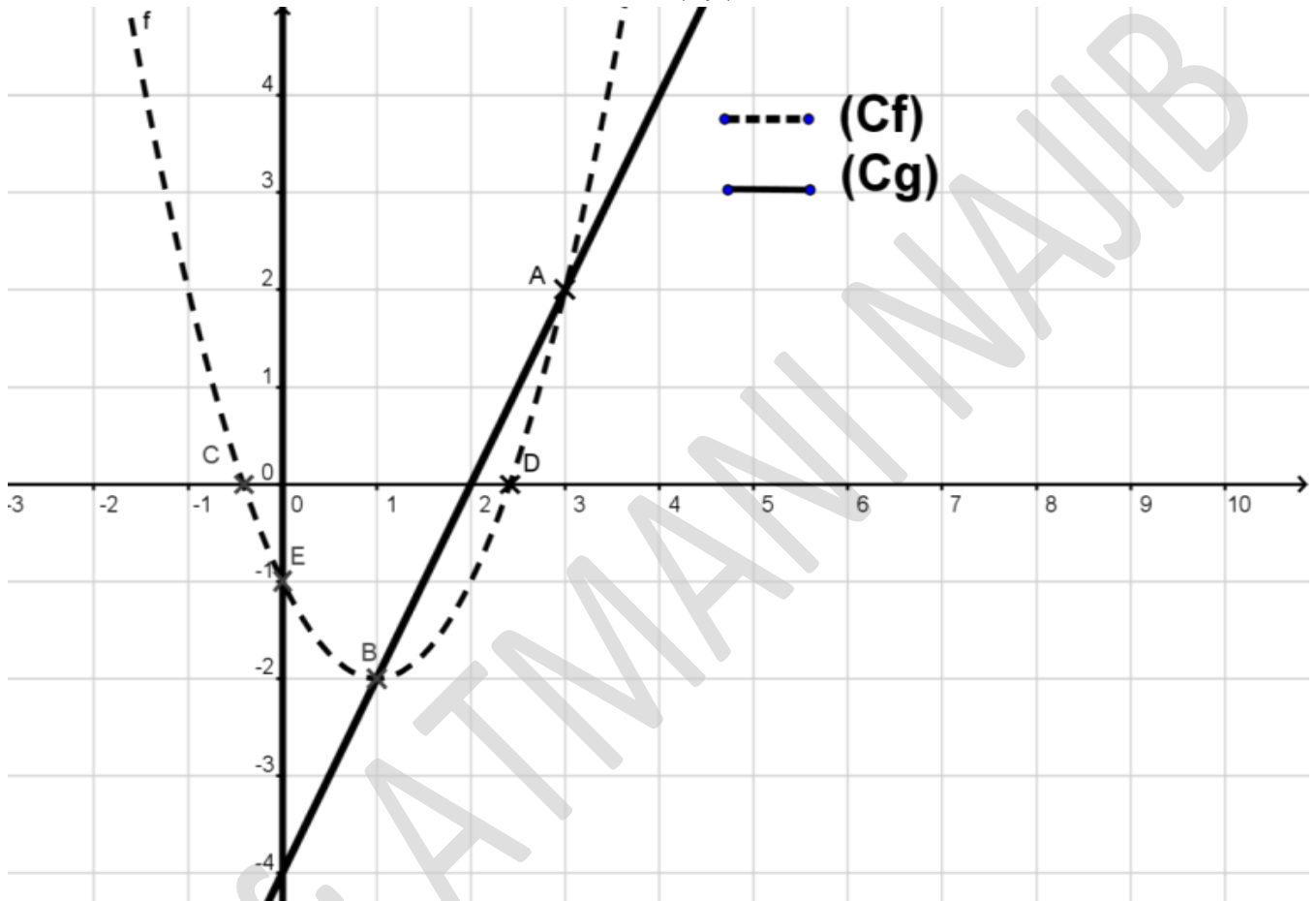
**Exercice :** Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 4$$

Les courbes représentatives  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont données dans le repère ci-dessous :

Voire figure)

1. Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation  $f(x) = g(x)$
2. Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation  $f(x) > g(x)$
3. Trouver les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère



**Solutions :** 1) a) Résolution graphique de l'équation  $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$

On a donc  $x=1$  et  $x=3$  donc  $S = \{1; 3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation  $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ Signifie : } x^2 - 2x - 1 = 2x - 4 \quad \text{c'est-à-dire : } x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$a=1 \text{ et } b=-4 \text{ et } c=+3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{C'est-à-dire : } x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{Et} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc  $S = \{1; 3\}$

2) a) Résolution graphique de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  :

La courbe  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$

si  $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$

Donc  $S = ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  :

$f(x) > g(x)$  Signifie  $x^2 - 2x - 1 > 2x - 4$

C'est-à-dire :  $x^2 - 4x + 3 > 0$

Les racines sont :  $x_1 = 3$  et  $x_2 = 1$

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+

Donc  $S = ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$

3) a) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

$f(x) = 0$  Signifie  $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + 2\sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = \frac{-(-2) - 2\sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

Donc les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses sont :

$C(1 - \sqrt{2}; 0)$  et  $D(1 + \sqrt{2}; 0)$

b) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a  $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$

Donc le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est :  $E(0; -1)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

