Correction Série : LA DERIVATION

Exercice1 : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2$.

1) Montrer que f est dérivable en $a=1$ et préciser $f'(1)$

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $a=1$

Solution : 1) On calcul : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$ on a : $f(1)=2\times1^2=2$

Donc : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}$

$\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$

Donc f est dérivable en en $a=1$ et $f'(1)=4$

2) L'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a $a=1$: donc : $(T):y=f(1)+f'(1)(x-1)$ et On a : $f(1)=2\times1^2=2$ et $f'(1)=4$

Donc : $(T):y=2+4(x-1)$

Donc : $(T):y=2+4x-4$ Donc : $(T):y=4x-2$

Exercice2 : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$.

1) vérifier que : $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

2) Montrer que f est dérivable en $a=-2$ et préciser $f'(-2)$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $a=-2$

Solution : 1) $(x+2)(x-1)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$

2)On calcul : $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=?$ on a : $f(-2)=(-2)^2-2-3=4-5=-1$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

3) L'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a $a=-2$: donc : $(T):y=f(-2)+f'(-2)(x-(-2))$ et On a : $f(-2)=-1$ et $f'(-2)=-3$

Donc : $(T):y=-1-3(x+2)$

Donc : $(T):y=-1-3x-6$ Donc : $(T):y=-3x-7$

Exercice3 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=x^3$

4) $f(x)=x^5+3x^2$

Solution : 1) $f'(x)=(11)'=0$

2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$

4) $f'(x)=(x^5+3x^2)'=(x^5)'+(3x^2)'$

$f'(x)=(x^5+3x^2)'=5x^{5-1}+3(x^2)'=5x^4+3\times 2x^{2-1}=5x^4+6x$

La fonction derivée f'	La fonction f
$f'(x)=0$	$f(x)=k$
$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax+b$
$f'(x)=nx^{n-1}$ $n\in\mathbb{Z}^*$	$f(x)=x^n$
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}$
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}$

La fonction derivée f'	La fonction f
$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u+v$
$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=u-v$
$f'(x)=k.u'$	$f(x)=k.u$
$f'(x)=u'\times v+u\times v'$	$f(x)=u\times v$
$f'(x)=nu^n\times u'$	$f(x)=u^n$
$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$	$f(x)=\frac{1}{u}$
$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{u}{v}$

Exercice4 : Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=5x^3-2x^2+5x-3$

2) $f(x)=x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution : 1) $f(x)=5x^3-2x^2+5x-3$

$f'(x)=(5x^3-2x^2+5x-3)'=5\times 3x^{3-1}-2\times 2x^{2-1}+5-0$

$f'(x)=15x^2-4x+5$

2) $f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=(x^2)'+(7x+15)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(\sqrt{x})'$

$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice5 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=(5x^2+1)(3x-1)$

Solution : On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=((5x^2+1)(3x-1))'=(5x^2+1)'\times(3x-1)+(5x^2+1)\times(3x-1)'$

$f'(x)=10x\times(3x-1)+3(5x^2+1)=30x^2-10x+15x^2+3$

$f'(x)=45x^2-10x+3$

Exercice6 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=(3x+4)^3$

Solution : On utilise la formule : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=((3x+4)^3)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times 3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$

Exercice7 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=-\frac{\left(2x-1\right)'}{\left(2x-1\right)^2}=-\frac{2}{\left(2x-1\right)^2}$$

Exercice8 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{x+2}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{\left(3x-1\right)'\left(x+2\right)-\left(3x-1\right)\left(x+2\right)'}{\left(x+2\right)^2}=\frac{3\left(x+2\right)-1\times\left(3x-1\right)}{\left(x+2\right)^2}=\frac{7}{\left(x+2\right)^2}$$

Exercice9: Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f\left(x\right)=4x^4-\dfrac{1}{3}x^3-x+1$ 2) $f\left(x\right)=\dfrac{3}{x}$ 3) $f\left(x\right)=4\sqrt{x}-1$ 4) $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{3x-2}$

5) $f\left(x\right)=\left(3x^2+2\right)\left(7x+1\right)$ 6) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{5x+7}$ 7) $f\left(x\right)=\dfrac{7x}{x^3+1}$

Solutions :1) $f'\left(x\right)=\left(4x^4-\dfrac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\dfrac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

2) $f'\left(x\right)=\left(\dfrac{3}{x}\right)'=\left(3\times\dfrac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{-3}{x^2}$

3) $f'\left(x\right)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-0=\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{3x-2}$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)'=\frac{\left(2x+1\right)'\left(3x-2\right)-\left(2x+1\right)\left(3x-2\right)'}{\left(3x-2\right)^2}=\frac{2\left(3x-2\right)-3\times\left(2x+1\right)}{\left(3x-2\right)^2}=\frac{6x-4-6x-3}{\left(3x-2\right)^2}=\frac{-7}{\left(3x-2\right)^2}$$

5) $f\left(x\right)=\left(3x^2+2\right)\left(7x+1\right)$ On utilise la formule : $\left(u\times v\right)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'\left(x\right)=\left(\left(3x^2+2\right)\times\left(7x+1\right)\right)'=\left(3x^2+2\right)'\times\left(7x+1\right)+\left(3x^2+2\right)\times\left(7x+1\right)'$$

$$f'\left(x\right)=6x\times\left(7x+1\right)+7\left(3x^2+2\right)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

6) $f\left(x\right)=\dfrac{7x}{x^3+1}$ On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{\left(7x\right)'\left(x^3+1\right)-7x\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7\left(x^3+1\right)-7x\times3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7-14x^3}{\left(x^3+1\right)^2}$$

Exercice10 : Déterminer les fonctions dérivées dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$

$$f'(x)=\left(x^2\right)'+(3x-1)'=2x+3$$

2) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ Avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien