**PROF : ATMANI NAJIB**
**1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF**
**http://www.xriadiat.com/**

## Série d'exercice sur : Limite d'une fonction

### Exercices avec solutions
### Présentation globale

**LIMITE FINIE EN A.**
**LIMITE INFINIE EN $\pm\infty$**
**LIMITE FINIE EN $\pm\infty$**
**LIMITE INFINIE EN UN POINT**
**OPERATIONS SUR LES LIMITES.**
**LIMITES D'UNE FONCTION POLYNOME EN $\pm\infty$**
**LIMITES D'UNE FONCTION RATIONNELLE EN $\pm\infty$**
**LIMITES A DROITE ET A GAUCHE**

**Exercice1 :** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^8$ 2) $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+2x+1$ 3) $\lim\limits_{x\to -1} 5x^2+2x-8$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

**Solutions :** 1) $\lim\limits_{x\to 0} x^8=?$ Et bien on remplace tout simplement le x par 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^8=0^8=0$

2) $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+2x+1=?$ Et bien on remplace tout simplement le x par 2 :

$\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+2x+1=3\times 2^2+2\times 2+1=17$

3) $\lim\limits_{x\to -1} 5x^2+2x-8=?$ Et bien on remplace tout simplement le x par -1 :

$\lim\limits_{x\to -1} 5x^2+2x-8=5\times(-1)^2+2\times(-1)-8=-5$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x}{2x^3+3x-4}=\frac{3\times 1^2-1}{2\times 1^3+3\times 1-4}=\frac{2}{1}=2$ ( on remplace tout simplement le x par 1)

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}+3}{x^2+3x+2}=\frac{\sqrt{4\times 2+1}+3}{2^2+3\times 2+2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}=\frac{5\times 1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\frac{4}{3+1}=1=l$

Comme tu le vois il n'y a aucune difficulté, on remplace le x et on calcule !
Bon ça ce sont des cas simples, mais ce n'est pas tout le temps comme ça.

**Exercice2 :** Calculer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^6$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2022}$ 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} -7x^{2023}$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5x^{2020}$ 5) $\lim\limits_{x\to -\infty} -4x^8$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} -9x^7$

**Solutions :** 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2022} = +\infty$ car 2022 pair

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^{2023} = +\infty$ car 2023 impair

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^{2020} = +\infty$ car 2020 pair

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^{8} = -\infty$ car 8 pair

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} -9x^{7} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{7} = +\infty$ et $-9$ *négatif*

**Exercice3 :** Calculer les limites suivantes :**1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5}$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^7}$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{x^5}$

**5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{x^{2021}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-5}{x^{2023}}$

**Solution : 1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = 0^-$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^7} = 0^-$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4}{x^5} = 0^+$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{x^{2021}} = 0^+$

**6)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-5}{x^{2023}} = 0^+$

**Remarques :** On devrait écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$ Oui mais" $\frac{1}{+\infty}$ " CE N'EST ABSOLUMENT PAS MATHEMATIQUE !!!

Il ne faut JAMAIS écrire " $\frac{1}{+\infty}$ "dans une copie, ce sera immédiatement rayé par le correcteur !!

En revanche sur un brouillon tu peux tout à fait l'écrire.

De même, si on cherche la limite en 0, on devrait écrire : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$

Or tu sais très bien qu'ON NE DIVISE JAMAIS PAR 0 !!!

Il est également absolument faux d'écrire " $\frac{1}{0}$ "n'écris jamais ça dans ta copie !!

Alors comment faire ?
Et bien c'est simple, il y a 2 formules à retenir, mais au brouillon, IL NE FAUT SURTOUT PAS LES ECRIRE SUR UNE COPIE : " $\frac{1}{\infty} = 0$ " et " $\frac{1}{0} = \infty$ "Ces formules sont très simples à retenir :

Pour la 1ère, c'est comme si tu avais un gâteau que tu divisais en une infinité de part.
Tu peux donc imaginer que les parts seront microscopiques, ce qui donne 0.
Pour la 2ème, c'est comme si tu avais un gâteau que tu divisais en faisant des parts minuscules, tu auras donc une infinité de part, d'où l'infini.

**Exercice4 :** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-5}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{9}{x^5}$ **4)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-12}{x^4}$

**5)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

**Solution : 1)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ **2)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$ **3)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{9}{x^5} + \infty$ **4)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$

**5)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ **6)** $\lim\limits_{x\to0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + \infty = +\infty$

**Exercice5 :** Calculer la limite suivante : $\lim_{x\to 0^+} 2x+1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**Solution :** $\lim_{x\to 0^+} 2x+1+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ car : $\lim_{x\to 0^+} 2x+1=1$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

**Exercice6 :** 1) $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=-x^2+5$

Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)$

**Solution :** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} -x^2+5=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+1+(-x^2+5)=6$

**Exercice7 :** Calculer les limites suivantes :1) $\lim_{x\to 0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}$ 2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$

3) $\lim_{x\to+\infty} x^2-x$

**Solution :** 1) $\lim_{x\to 0} x^2+x+2=2$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc : $\lim_{x\to 0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\frac{3}{1}=3$

3) On a $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim_{x\to+\infty} x^2-x=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty$

**Exercice8 :** Déterminer : $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

**Solution :** On a : $\lim_{x\to 2} x^2-4=2^2-4=4-4=0$ et $\lim_{x\to 2} x-2=2-2=0$

Donc Formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=4$

**Exercice9 :** Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} 2x^2-x+4$ et $\lim_{x\to-\infty} 5x^2-2x+4$ et $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4$

**Solution :** $\lim_{x\to+\infty} 2x^2-x+4=\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 5x^2-2x+4=\lim_{x\to-\infty} 5x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4=\lim_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

**Exercice10:** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-2x-1}{2x^2-3x+8}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-7x^2+3x-6}{2x^2+x-1}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-2x^2-x-3}{3x^3-x+11}$

**Solution :**1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x-1}{2x^2-3x+8}$

On sait que : La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x-1}{2x^2-3x+8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{2x^2}=\dfrac{4}{2}=2$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4-7x^2+3x-6}{2x^2+x-1}$

On sait que : La limite d'une fonction rationnelle en $-\infty$ est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4-7x^2+3x-6}{2x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x\times x\times x\times x}{2x\times x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x\times x=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2-x-3}{3x^3-x+11}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\times3\times x\times x}{3\times x\times x\times x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0^-$

**Exercice11 :** Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-9x^2-4x^3+1$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-2x^6-2x^5+3x-15$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

**Solution :** 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-9x^2-4x^3+1$

On sait que : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ est la limite de son plus
Grand terme en $+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}x-9x^2-4x^3+1=\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^3=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-2x^6-2x^5+3x-15$

On sait que : La limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ est la limite de son plus
Grand terme en $-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-2x^6-2x^5+3x-15=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^6=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=0$

**Exercice12 :** Déterminer : a) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{3x+1}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3x+1}{2x-6}$

**Solution : a)** On a : $\lim\limits_{x\to3^+}3x+1=3\times3+1=10$ et $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=2\times3-6=6-6=0$

On va étudier le signe de : $2x-6$

$2x-6=0\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{2}\Leftrightarrow x=3$

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-6$ | $-$ | $0$ | $+$ |

On a donc : $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0^+$

Donc $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x+1}{2x-6} = +\infty$

**b)** On a : $\lim\limits_{x \to 3^-} 3x+1 = 3\times3+1 = 10$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} 2x-6 = 2\times3-6 = 6-6 = 0$

On a donc : $\lim\limits_{x \to 3^-} 2x-6 = 0^-$

Donc $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x+1}{2x-6} = -\infty$

**Remarque :** 1) Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\dfrac{?}{0^+}$ et $\dfrac{?}{0^-}$

2)Ne pas utiliser **+∞** ou **−∞** dans les opérations dans $\mathbb{R}$ (**+∞** et **−∞** ne sont pas des réels)

**Exercice13 :** Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-8}{2x-4}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x-8}{2x-4}$

2) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-5x^2+1}{x+2}$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{-5x^2+1}{x+2}$

3) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{5x-20}{-2x+4}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{5x-20}{-2x+4}$

**Solution :1) a)** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-8}{2x-4}$

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} 3x-8 = 3\times2-8 = \boxed{-2}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} 2x-4 = 2\times2-4 = 4-4 = 0$

On va étudier le signe de : $2x-4$

$2x-4=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{2} \Leftrightarrow x=4$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-4$ | $-$ | $0$ | $+$ |

On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} 2x-4 = \boxed{0^+}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x-8}{2x-4} = -\infty$

**b)** On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^-} 2x-4 = \boxed{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} 3x-8 = 3\times2-8 = \boxed{-2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x-8}{2x-4} = +\infty$

**2) a)** $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-5x^2+1}{x+2}$

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} -5x^2+1 = -5\times(-2)^2+1 = \boxed{-19}$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} x+2 = -2+2 = 0$

On va étudier le signe de : $x+2$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ |

On a donc : $\lim\limits_{x \to -2^+} x+2 = \boxed{0^+}$

Donc $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-5x^2+1}{x+2} = -\infty$

**b)** On a donc : $\lim\limits_{x \to -2^-} x+2 = \boxed{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} -5x^2+1 = -5\times(-2)^2+1 = \boxed{-19}$

Donc $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{-5x^2+1}{x+2} = +\infty$

**3) a)** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{5x-20}{-2x+4}$

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} -5x+20 = -5\times 2+20 = \boxed{10}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} -2x+4 = -4+4 = 0$

On va étudier le signe de : $-2x+4$

$-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+4$ | $+$ | $0$ | $-$ |

On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^+} -2x+4 = \boxed{0^+}$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} -5x+20 = \boxed{10}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$

**b)** On a donc : $\lim\limits_{x \to 2^-} -2x+4 = \boxed{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} -5x+20 = \boxed{10}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$

**Exercice14 :** Soient les fonctions tels que : $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

1)Déterminer :a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

**Solution :**1)a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to 2} -3x^2+x=-10$ donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2+x = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ? et $g(x)=\dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2} = -2$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien