

PROF : ATMANI NAJIB
1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF
Série d'exercices sur : chapitre Dénombrement avec solutions
<http://www.xriadiat.com/>

Exercice1 : Combien de nombres de deux chiffres différents on peut former avec les chiffres Suivants : 2 ;3 ;4 ?

Solution : les nombres sont : 23 ; 24 ; 32 ; 42 ; 34 ; 43.

Donc : on peut former 6 nombres

Il y'a 3 possibilités pour le chiffre des unités

Il y'a 2 possibilités pour le chiffre des dizaines

D'après le principe général dénombrement le nombres de possibilités est : $n = 2 \times 3 = 6$

Chiffre des unités	Chiffre des dizaines
3	2

Exercice2 : On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Solution : Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)

D'après le principe général dénombrement le nombres de possibilités est :

L'ensemble des possibilités est : $\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$

$n = 2 \times 2 = 4 = \text{card} \Omega$ (Le nombre d'élément de l'ensemble Ω)

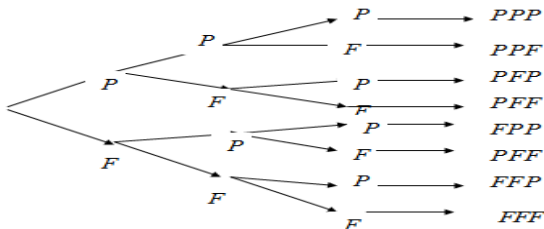
1ere fois	2ere fois
2	2

Exercice3 : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Solution : Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)

Il y'a 2 possibilités pour la 3 fois : P (pile) ou F (face)



1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est : $n = 2 \times 2 \times 2 = 8$

L'ensemble des possibilités est : $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$

$8 = \text{card} \Omega$ (Le nombre d'élément de l'ensemble Ω)

Exercice4 : Combien de nombres de trois chiffres on peut former avec les chiffres

Suivants : 2 ;5 ;6 et 8 ?

Solution :

Il y'a 4 possibilités pour le chiffre des unités

Il y'a 4 possibilités pour le chiffre des dizaines

Il y'a 4 possibilités pour le chiffre des centaines

D'après le principe général dénombrement le nombres de possibilités est :

$n = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

Donc : on peut former 64 nombres

Exercice5 : Une classe de 15 garçons et 12 filles.

Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.

Combien de possibilités de choix ?

Solution : 15 possibilités pour choisir un garçon, et

12 possibilités pour choisir la fille. Il y a $15 \times 12 = 180$ possibilités.

Chiffre unités	Dizaines	Centaines
4	4	4

Exercice6 : L'association de 20 membres souhaite élire :

- Le président,
- Le secrétaire, et
- Le trésorier.

Combien A-t-il de possibilités d'avoir ces trois responsables. Pas de cumul de fonction.

Solution : Pour le président : 20 possibilités (20 membres).

Pour le secrétaire : 19 possibilités (19 membres restants).

Pour le trésorier : 18 possibilités (18 membres restants).

Le total des possibilités n est le produit :

$$n = 20 \times 19 \times 18 = 36342$$

Exercice7 : Combien de nombres de deux chiffres tels que : Le chiffre des unités est 0 ou 1 ou 2 et Le chiffre des dizaines est 5 ou 6 ou 7 ou 8 ?

Solution : On peut former : $3 \times 4 = 12$ nombres

Exercice8 : Soit l'ensemble $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

1) Combien de nombres de 3 chiffres on peut former avec les éléments de E ?

2) Combien de nombres de 3 chiffres différents deux à deux on peut former avec les éléments de E ?

Solution : 1) Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des unités

Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des dizaines

Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des centaines

Le nombre cherché est : $\underbrace{9 \times 9 \times 9}_{3 \text{ fois}} = 9^3 = 729$

2) Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des unités

Il y'a 8 possibilités pour le chiffre des dizaines

Il y'a 7 possibilités pour le chiffre des centaines

Le nombre des nombres est $9 \times 8 \times 7 = 504$

Exercice9 : 1) de Combien de façons différentes peut - on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 4 cases sachant que chaque case peut contenir toutes les boules

Solutions : D'après le principe général dénombrement le nombre de possibilités est :

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{4 \text{ fois}} = 5^4 = 625$$

Exercice10 : Combien de nombres de 4 chiffres différents on peut former avec les chiffres

Suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ?

Solution : le nombre cherché est : $A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5$ (4 facteurs) (on choisit 4 parmi 8)

$$\text{Donc : } A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Exercice11 : Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

Solution : Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements sans répétitions puisque l'ordre des lettres importe et que l'on requiert qu'elles soient distinctes.

Les lettres de l'alphabet, i.e. $E = \{a, b, \dots, z\}$ il Ya : 26

On s'intéresse aux arrangements sans répétitions de 5 éléments pris parmi 26

$$\text{Il y en a : } A_{26}^5 = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$$

Exercice12 : dans un tournoi il Ya 10 participants

Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coureurs ne peuvent pas prendre le même classement)

Solution : Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions donc : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Exercice13 : Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

1) On tire 3 boules de l'urne Successivement avec remise

Et on construit un nombre de trois chiffres

Quel est le nombre de nombres possibles ?

2) On tire 3 boules de l'urne Successivement sans remise

Quel est le nombre de nombres possibles ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions (Successivement avec remise)

Il y en a donc : $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$

2) Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions (Successivement sans remise)

Il y en a donc : $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

Exercice14 : Calculer : A_4^2 ; A_5^3 ; A_7^4 ; $\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

Solution : $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ et $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ et $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

$$\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = 5 \times 4 = 20$$

Exercice15 : Quelle est le nombre de mots de 4 lettres (avec un sens ou non) : A ; I ; D ; S
Qu'on peut former ? (Sans répétitions)

Solution : chaque mot former s'appelle une permutation

Les mots sont : « AIDS » et « AISD »

Il y en a donc : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ permutations

Donc : le nombre de mots de 4 lettres (avec un sens ou non) : A ; I ; D ; S

Qu'on puisse former est 24 mots

Exercice16 : De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Solution : $10! = 3628800$

Exercice17 : Soit l'ensemble $\Omega = \{a; b; c; d\}$

$card\Omega = 4$ (Le nombre d'élément de l'ensemble Ω)

Quelle est le nombre de sous-ensembles à 3 éléments ?

Solution : Les sous-ensembles de Ω à 3 éléments sont :

$A_1 = \{a; b; c\}$ Est un sous-ensemble de Ω à 3 éléments

$A_1 = \{a; b; c\}$ Est dite une COMBINAISON de 3 éléments

$A_2 = \{a; b; d\}$ Est une Combinaison de 3 éléments

$A_3 = \{b; c; d\}$ Est une Combinaison de 3 éléments

$A_4 = \{a; c; d\}$ Est une Combinaison de 3 éléments

Il y a : 4 sous-ensembles à 3 éléments

Il y a : donc 4 Combinaisons à 3 éléments

On note par : C_4^3 Le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 4 éléments

On a donc : $C_4^3 = 4$

Exercice18 : Calculer : $\frac{12!}{10!}$; $\frac{9 \times 7!}{5 \times 8!}$; $\frac{9 \times 5!}{8 \times 3!}$; C_6^3 ; C_6^4 ; C_7^3 ; C_7^4 ; C_6^0 ; C_7^1 ; C_7^7

Solution : $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$

$$\frac{9 \times 7!}{5 \times 8!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5 \times 8!} = 9 \times 7 \times 6 = 378$$

$$\frac{9 \times 5!}{8 \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 5 \times 4 \times 3!}{8 \times 3!} = 9 \times 5 \times 4 = 180$$

$$C_6^3 = \frac{A_6^3}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 7 = 35 \quad \text{Et} \quad C_7^4 = \frac{A_7^4}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 7 = 35$$

$$C_6^0 = 1 \quad C_7^1 = 7 \quad C_7^7 = 1$$

Exercice19 : Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules rouges

On tire **2** boules de l'urne **simultanément**.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ? ($\text{card } \Omega = ?$)
- 2) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches
- 3) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges
- 4) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs
- 5) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 8 éléments (**simultanément**) donc le nombre de

tirages possibles est : $\text{card } \Omega = C_8^2 = \frac{A_8^2}{2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

2) le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches est : $C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$

3) le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges est : $C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

4) Tirer 2 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 2 boules blanches **OU** tirer 2 boules rouges **OU** c'est : +

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs est : $C_3^2 + C_5^2 = 3 + 10 = 13$

5) tirer 2 boules de couleurs différentes signifie : tirer 1 boule blanche **ET** tirer 1 boule rouge **ET** c'est : X

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes est : $C_3^1 \times C_5^1 = 3 \times 5 = 15$

Methode2 : $28 - 13 = 15$ possibilités

Exercice20 : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges

On tire au hasard **2** boules **successivement et sans remise**

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ? ($\text{card } \Omega = ?$)
- 2) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches
- 3) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges
- 4) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs
- 5) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation d'arrangement puisque chaque tirage est un arrangement de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments

Donc le nombre de tirages possibles est : $card\Omega = A_7^2 = 7 \times 6 = 42$

2) le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches est : $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
B 3	B 3

3) le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges est : $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

4) Tirer 2 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 2 boules blanches **OU** tirer 2 boules rouges

OU

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
B 3	B 3

OU c'est :

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
R 4	R 4

+

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs est : $A_3^2 + A_4^2 = 6 + 12 = 18$

5) tirer 2 boules de couleurs différentes signifie : tirer 1 boule blanche **ET** tirer 1 boule rouge

ET c'est : **X** mais attention à l'ordre

OU

B	R
---	---

Le

R	B
---	---

nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes est :

$$A_3^1 \times A_4^1 + A_4^1 \times A_3^1 = 3 \times 4 + 4 \times 3 = 24$$

Methode2 : $42 - 18 = 24$ possibilités

Exercice11 : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges

On tire au hasard **2** boules **successivement et avec remise**

1) Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités ? ($card\Omega = ?$)

2) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches

3) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges

4) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de mêmes couleurs

5) Quel est le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes

Solution :1)

Le nombre de tirages possibles est : $card\Omega = 7 \times 7 = 7^2 = 49$

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
7	7

2) le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches est :

$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$

3) le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges est :

$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
B 3	B 3

4) Tirer 2 boules de mêmes couleurs signifie : tirer 2 boules blanches **OU** tirer 2 boules rouges

OU c'est : **+**

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
R 4	R 4

Ou

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
R 4	R 4

Le

nombre de possibilités de tirer 2 boules de

mêmes couleurs est : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

5) tirer 2 boules de couleurs différentes signifie : tirer 1 boule blanche **ET** tirer 1 boule rouge

ET c'est : **X** mais attention à l'ordre

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
B 3	R 4

OU

1 ^{er} tirage	2 ^{er} tirage
R 4	B 3

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes est : $3 \times 4 + 4 \times 3 = 12 + 12 = 24$

Methode2 : $49 - 25 = 24$ possibilités

Exercice 22 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?

3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de

tirages possibles est : $C_7^2 = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

2) pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs

Donc : le nombre est : $C_4^2 + C_3^2 = \frac{A_4^2}{2!} + \frac{A_3^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 6 + 3 = 9$

Car il Ya 3boules pairs et 4boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boule paire **et** tirer une boule impaire :

Donc : le nombre est : $C_4^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 = 12$

Exercice 23 : UN tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois

Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution : Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8

Comme il n'y a qu'un match entre deux équipes

(Pas d'aller-retour), le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y

a donc $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ rencontres possibles

Exercice 24 : Le bureau d'une association contient 4 hommes et 5 femmes et on souhaite élire un comité de 2 hommes et 3 femmes

1) Combien de comités peut-on élire ?

2) on suppose que le président H1 et Madame la secrétaire F1 doivent être présent

Combien de comités peut-on élire ?

Solution :1) Il s'agit d'une situation de combinaisons de 5 éléments dans un ensemble de 9 éléments (simultanément)

Donc le nombre de comités qu'on peut élire est : $C_4^2 \times C_5^3 = 6 \times 10 = 60$

2) le nombre est : $C_3^2 \times C_4^3 = 3 \times 4 = 12$

Exercice25 : À la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serre la main. S'il y a 30 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice26. Une femme a dans sa garde-robe : 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.

De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution :

Cette femme peut s'habiller de

$4 \times 5 \times 3 = 60$ façons

Exercice27 : A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, un d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...)?

Solution : Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément). Il existe donc :

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896 \text{ Podiums différents}$$

Exercice28 : Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Solution : Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$. Le nombre de ces 15-listes est donc de cardinal $(\text{card}\Omega)^{15} = 4^{15}$

Exercice29 : Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Solution

1) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ 6 fois par lui-même. Il y donc

$$6^6 = 46656 \text{ Choix possibles.}$$

2) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est à-dire une permutation des 6 chiffres. Il aura donc $6! = 720$ choix possibles

Exercice30 : Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués

Quel est le nombre de choix possibles ?

Solution : Les délégués sont choisis sans ordre

Les choix simultanés de 2 délégués parmi les 32 élèves sont au nombre de $C_{32}^2 = 496$

Exercice31 : Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?

2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?

3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Solution :

1) Le nombre de d'échantillons différents est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30, soit $C_{30}^4 = 27405$

2) Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les $30-12=18$ non célibataires, soit $C_{18}^4 = 3060$

3) Le contraire de « au moins un célibataire » est « aucun célibataire ».

Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal au nombre total d'échantillons diminué du nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire. Ces deux nombres ayant été déterminés dans les deux questions précédentes, on conclut que le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal à $C_{30}^4 - C_{18}^4 = 27405 - 3060 = 24345$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

