PROF : ATMANI NAJIB
1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF
http://www.xriadiat.com/

Série d'exercices avec solutions : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

1) Domaine de définitions.
2) Fonctions paires et Fonctions impaires et interprétations s géométriques
3) Fonctions majorées ; minorées ; bornée
4) comparer deux fonctions et interprétations géométriques
5) Les variations d'une fonction numérique
6) Les extremums d'une fonction numérique

Exercice1 : Soit la fonction f définie par, $f(x)=3x^2-1$

Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par *f*.

Solution : $f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ et $f\left(\sqrt{2}\right)=3\times\left(\sqrt{2}\right)^2-1=6-1=4$

$f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

Exercice2 : On considère la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

Solution : 1) $f(0)=\dfrac{1}{0-3}=-\dfrac{1}{3}$ donc 0 aune image par f c'est : $-\dfrac{1}{3}$

$f(2)=\dfrac{1}{2-3}=-1$ Donc 2 a une image par f c'est : -1

$f(-3)=\dfrac{1}{-3-3}=-\dfrac{1}{6}$ Donc -3 a une image par f c'est : $-\dfrac{1}{6}$

$f(3)=\dfrac{1}{3-3}=\dfrac{1}{0}$!!!!!??? Mais $\dfrac{1}{0}$ n'existe pas en math donc 3 n'a pas d'images par f

Exercice3 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=2x+1$. 2) $g(x)=3x^2-x+1$ 3) $h(x)=\dfrac{3}{x}$

4) $M(x)=\dfrac{3}{2x-4}$. 5) $N(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 6) $K(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

Solution : 1) $f(x)=2x+1$ Un réel a toujours une image.
Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $g(x)=3x^2-x+1$ Un réel a toujours une image.
Donc $D_g=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\dfrac{3}{x}$ Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul. : $D_h=\{x\in\mathbb{R}/x\neq0\}$

Donc $D_h=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

On dira aussi que 0 est une valeur interdite pour la fonction h

4) $M(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est

l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul. : $D_M = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 4 \neq 0\}$

$2x - 4 = 0$ ssi $x = \frac{4}{2} = 2$ Donc $D_M = \mathbb{R} - \{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction M

5) $N(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 4}$. $D_N = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$

$x^2 - 4 = 0$ Signifie $x^2 - 2^2 = 0$

Signifie $(x-2)(x+2) = 0$

Signifie $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$ Signifie $x = 2$ ou $x = -2$

Donc $D_N = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

6) $K(x) = \frac{7x - 1}{x^3 - 2x}$. $D_K = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 2x \neq 0\}$

$x^3 - 2x = 0$ Signifie $x(x^2 - 2) = 0$ Signifie $x = 0$ ou $x^2 - 2 = 0$

Signifie $x = 0$ ou $x^2 = 2$ Signifie $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Donc : $D_K = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

Exercice4 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = 3x^2 - 5$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f est une fonction paire
3) Donner une interprétation géométrique (la courbe représentative de f)

Solution :1) f est une fonction polynôme : Donc $D_f = \mathbb{R}$

2)

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3) la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.

Exercice5 : Soit g une fonction définie par : $g(x) = \frac{3}{x}$

1) Déterminer le domaine de définition de g
2) Montrer que g est une fonction impaire
3) Donner une interprétation géométrique (la courbe représentative de f)

Solution :1) On a $g(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $x \neq 0$

Donc : $D_g = \mathbb{R}^*$

2)

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$

  $g(-x) = -g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exercice6 : Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. 2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. 3) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}=x^2-\frac{1}{x}=\left(-x^2+\frac{1}{x}\right)$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\right\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\frac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

Exercice7 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=7x-5$

Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Solution : f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1\prec 7x_2$ car $7\succ 0$

Donc $7x_1-5\prec 7x_2-5$

Alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice8 : Soit f une fonction tel que : $g(x)=-2x+3$

Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Solution :

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $-2x_1\succ -2x_2$ car $-2\prec 0$

Donc $-2x_1+3\succ -2x_2+3$

Alors $g(x_1)\succ g(x_2)$ d'où g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice9 : Soit f une fonction tel que : $g\left(x\right)=\frac{2}{x}$

1) Déterminer le domaine de définition de g

2) Montrer que g est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

3) Montre que g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

4) Donner le tableau de variation de g

Solution :

1) $g\left(x\right)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\left\{0\right\}=\mathbb{R}^*$

2)Soient $x_1\in\left[0;+\infty\right[$ et $x_2\in\left[0;+\infty\right[$ tel que $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ 0$

Alors $g\left(x_1\right)\succ g\left(x_2\right)$ d'où g que est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

3) Soit $x_1\in\left]-\infty;0\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;0\right]$ tel que $x_1\prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ 0$

Alors $g\left(x_1\right)\succ g\left(x_2\right)$ d'où g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

4) tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Exercice10 : Soit f une fonction tel que : $f\left(x\right)=3x^2+2$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Montrer que le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Est : $T\left(x_1;x_2\right)=3\left(x_1+x_2\right)$

3) Montrer que : f est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$

4) Montrer que : f est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$

5) Donner le tableau de variation de f

Solution :1) f Est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que $x_1\neq x_2$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{\left(3x_1^2+2\right)-\left(3x_2^2+2\right)}{x_1-x_2}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{3x_1^2-3x_2^2+2-2}{x_1-x_2}=\frac{3\left(x_1^2-x_2^2\right)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=3(x_1+x_2)$$

3) on a : $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)$

Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ Donc $x_1+x_2\geq 0$

Donc $3(x_1+x_2)\geq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\geq 0$ D'où f est croissante sur $[0;+\infty[$

4)Soit $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$

Donc $x_1\leq 0$ et $x_2\leq 0$ Donc $x_1+x_2\leq 0$

Donc $3(x_1+x_2)\leq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\leq 0$

D'où f est décroissante sur $]-\infty;0]$

5) Résumé : **tableau de variation :** $f(0)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Exercice11 : Les fonction f et g définies respectivement par :

$f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

Exercice12 : Soient f et g les fonctions numériques tels que : $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

1) Déterminer leur ensemble de définition :

2) Comparer les fonctions f et g

3) Donner une interprétation géométrique du résultat

Solution : 1) $D_f=D_g=\mathbb{R}$ car des fonctions polynômes

2) $g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ donc $f\prec g$

3) La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de la courbe (C_f) de f sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Exercice13 : Soient f et g les fonctions numériques tels que : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=x^2$

1) Déterminer leur ensemble de définition :

2) Comparer les fonctions f et g

3) Donner une interprétation géométrique du résultat

Solution : 1) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ car des fonctions polynômes

2) $g(x) - f(x) = x^2 - (x^2+1) = -1 \prec 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(x) \prec f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $g \prec f$

3) La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de (C_g) La courbe de g sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Exercice14 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 2$

Démontrer que f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

Solution : $f(x) - 2 = -x^2 + 2 - 2 = -x^2 \leq 0$

Donc $f(x) \leq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 2$

Exercice15 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$

Démontrer que f est minoré par 1 sur $\mathbb{R}$.

Solution : $f(x) - 1 = x^2 + 1 - 1 = x^2 \geq 0$

Donc $1 \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

La fonction f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 1$

Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \geq 1$ donc $\dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$

Donc : $f(x) \leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 1$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \geq 1$ donc $x^2 + 1 \succ 0$

Donc : $0 \prec f(x)$

Par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 0$

Conclusion : $0 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice17 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$

1) Calculer : $f(0)$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(0) \leq f(x)$

3) En déduire que : $f(0)$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=5x^2+3$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

1) $f(0)=5\times 0^2+3=3$

2) $f(x)-f(0)=5x^2+3-3=5x^2\geq 0$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(0)\leq f(x)$

3) On a : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(0)\leq f(x)$

D'où $f(0)=3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice18 : Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$

1) Calculer : $g(0)$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)\leq g(0)$

3) En déduire que : $g(0)$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $g(x)=-4x^2+1$ $\quad D_g=\mathbb{R}$

1) $g(0)=-4\times 0^2+1=1$

2) $g(x)-g(0)=-4x^2+1-1=-4x^2\leq 0$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

3) On a : $\forall x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

D'où $g(0)=1$ est un maximum absolu de g sur $\mathbb{R}$

Exercice19 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-4x^2+4x+5$

1°a) Montrer que : $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Montrer que : $f(x)\leq 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) a) on a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-(4x^2-4x+1)$

$=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\geq 0$

Par suite $-(2x-1)^2\leq 0$ donc $6-(2x-1)^2\leq 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq 6$

2) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $6-(2x-1)^2\leq 6$ alors $f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice20 : Du tableau de variation on a :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	$0{,}5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Donner une valeur maximale et Minimale de f

Solution : Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

Exercice21 : Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f est une fonction impaire
3) Donner une interprétation géométrique (la courbe représentative de f)

Solution :1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\}$

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \; ou \;\; x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 ou \;\; x = -3$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-3;3\}$

2)

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R} - \{-3;3\}$, alors $-x \in \mathbb{R} - \{-3;3\}$
- $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{2x}{x^2 - 9}$

$f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) $O(0;0)$ est un centre de symétrique par à la courbe représentative

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien