PROF : ATMANI NAJIB

1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF

Cours : Calcul numérique Avec Exercices avec solutions

http://www.xriadiat.com/

Leçon2 : Calcul numérique : Partie3

Les équations et les inéquations du second degré a une inconnue

1°) Les équations du second degré a une inconnue.

1)Définition : Une équation du second degré a une inconnue est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme ax^2+bx+c.

<u>Exemple :</u> L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

2)Résolution d'une équation du second degré a une inconnue.

Exercice1 : Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$ 3) $(x+2)^2=9$

Solution :1) L'équation $x^2=16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{16}=4$ et $x=-\sqrt{16}=-4$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-4;4\}$

2)L'équation $x^2=-8$.

-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution

Dans ℝ. Donc : $S=\varnothing$

3)L'équation $(x+2)^2=9$.

On a alors $x+2=3$ ou $x+2=-3$.

L'équation admet deux solutions $x=3-2=1$ et $x=-3-2=-5$.Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ ssi $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

Soit : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

1)Définitions : Soit le du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$.

On appelle d**iscriminant** du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté $\Delta=b^2-4ac$.

<u>Exemple :</u> Pour le trinôme $3x^2-x-2$

Calculons le discriminant :

a = 3, b = -1 et c = -2 donc :

$\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4\times 3\times(-2) = = 1+24=25$

Propriété1 : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de

L'équation $x^2 = a$ (Dépendent du signe de a)

- Si a < 0, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si a = 0, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si a > 0, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Propriété2 : soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.
et soit Δ son discriminant

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$

Et on ne peut pas factorisée le trinôme ax^2+bx+c

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution (dite double) : $x_0=-\frac{b}{2a}$.

c a d : $S=\{x_0\}$ et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ c a d : $S=\{x_1;x_2\}$

Et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$

c) $x^2+3x+10=0$ d) $6x^2-x-1=0$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times 2\times(-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$ donc : $S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$

Et le trinôme $2x^2-x-6$ à une forme factorisée : $2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

C'est-à-dire : $2x^2-x-6=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)=(2x+3)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$: a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

Donc : $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times 2\times\frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$

Donc : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ à une forme factorisée : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$: a = 1, b = 3 et c = 10

Donc : $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times 1\times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle. C'est-à-dire : $S=\varnothing$

d) $6x^2-x-1=0$.

On a : $\Delta = 1+24 = 25$

Donc : $x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Par suite : $S = \left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

Par suite : $R(x) = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $6x^2-7x-5=0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

3) $3x^2+x+2=0$ **4)** $4x^2-8x+3=0$ 5) $3x^2-15x+18=0$

Solution :1) $6x^2-7x-5=0$

$\Delta = b^2-4ac = (-7)^2-4\times6\times(-5) = 49+120 = 169 = (13)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ et $x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

2) $a=2$ **;** $b=-2\sqrt{2}$ **;** $c=1$ **;** $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$\Delta = b^2-4ac = \left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1 = 8-8 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc **:** $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2+x+2=0$ $\Delta = b^2-4ac = (1)^2-4\times3\times2 = 1-24 = -23 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle. C'est-à-dire : $S = \emptyset$

4): $4x^2-8x+3=0$

Donc :$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \text{ x } 4 \text{x } 3 = 16$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ et $x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

5) $3x^2-15x+18=0$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \text{ x } 3 \text{ x } 18 = 225-216=9 \succ 0$

Les solutions de : $3x^2-15x+18=0$

Sont : $x_1 = \frac{15-3}{6} = 2$ ou $x_2 = \frac{15+3}{6} = 3$

Par suite : $S = \{2;3\}$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $4x^2+19x-5=0$ b) $9x^2-6x+1=0$

Solution : a) $4x^2+19x-5=0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les solutions sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4}=\frac{1}{4}$

Par suite : $S=\left\{-5;\frac{1}{4}\right\}$

b) $9x^2-6x+1=0$: Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite solution double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times9}=\frac{1}{3}$:

Par suite : $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

Exercice 5 : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)
Si chaque jouet avait couté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus.
Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés
Et soit p le prix d'un jouet en dh

Nous avons donc : $60=np$ et $60=(n-1)(p+3)$

Nous déduisons donc l'équation : $n^2+3n-180=0$

Calcul du discriminant : $\Delta = 729>0$ Les solutions sont : $n_1=\frac{-3+\sqrt{729}}{2\times1}=12$ et $n_2=\frac{-3-\sqrt{729}}{2\times1}=-15$

Nous rejetons $n_2=-15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

Exercice6 : La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470.
Quel est le premier de ces nombres ?

Solution : Appelons x le premier de ces trois nombres. x vérifie l'équation :

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=3470$

Donc : $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=3470$

Donc : $3x^2+6x+5=3470$

C'est-à-dire : $3x^2+6x-3465=0$

Calculons : $\Delta=6^2-4\times3\times(-3465)=36+41580=41616$

Les deux valeurs possibles pour x sont :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6-204}{6}=\frac{-210}{6}=-35$

Et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{41616}}{2\times3}=\frac{-6+204}{6}=33$

Comme x est un entier naturel x est positif le premier des trois nombres est 33.

Exercice7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2-4x+2=0$ 2) $x^2+5x+7=0$

3) $2x^2-4x+6=0$ 4) $x^2-4x-21=0$

5) $3x^2-6x+3=0$

Solution : 1) $x^2-4x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes

$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times 1}$ **et** $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times 1}$

$x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2} = 2+\sqrt{2}$ **et** $x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} = 2-\sqrt{2}$

Donc : $S = \left\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right\}$

2) $x^2 + 5x + 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times 1\times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle

C'est-à-dire : $S = \varnothing$

3) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 2\times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

4) $x^2 - 4x - 21 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 1\times(-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times 1}$ et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times 1}$

$x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

Donc : $S = \{-3; 7\}$

5) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times 3\times 3 = 36 - 36 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$

Donc : $S = \{1\}$

Exercice8 : Combien mesure la longueur d'un rectangle de périmètre 56 cm et d'aire 192 cm²?

Solution : Posons l="la longueur du rectangle"

Et L="la largeur du rectangle"

On doit résoudre le système : $\begin{cases} 2l + 2L = 56 \\ l\times L = 192 \end{cases}$

Isolons L dans la première équation :

On a : $2l + 2L = 56$ donc $2L = 56 - 2l$

C'est-à-dire : $L = \frac{56-2l}{2}$ Donc : $L = 28 - l$

Remplaçons maintenant cette valeur de L dans la deuxième équation.

$l\times L = 192$ Donc : $l\times(28 - l) = 192$

Donc : $28l - l^2 = 192$ Donc : $-l^2 + 28l - 192 = 0$

On obtient une équation du deuxième degré.

Calculons delta : $\Delta = 28^2 - 4\times(-1)\times(-192) = 16$

L'équation admet donc deux solutions :

$l_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-28-\sqrt{16}}{-2} = \frac{-28-4}{-2} = \frac{-32}{-2} = 16$

Et $l_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-28+\sqrt{16}}{-2} = \frac{-28+4}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12$

Les deux valeurs possibles pour la longueur sont :16 et 12.
Le produit de ces deux nombres vaut 192
Donc 16 et 12 correspondent bien à la longueur et à la largeur du rectangle.
La longueur de ce rectangle mesure donc 16 cm

2°) Les inéquations du second degré a une inconnue

Résumé :

Si $\Delta > 0$ le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de de a

Si $\Delta = 0$: le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

Si $\Delta < 0$: le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

Exemples : Résoudre les inéquations suivantes

a) $2x^2-3x+1\geq 0$ b) $-2x^2+4x-2\geq 0$ c) $3x^2+6x+5<0$

Solution : a) $2x^2-3x+1\geq 0$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc : $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times 2\times 1 = 9-8 = 1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2a} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$1/2$		1	$+\infty$
$2x^2-3x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1,+\infty[$

b) $-2x^2+4x-2>0$

Étudions le signe du trinôme de : $P(x) = -2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta = b^2-4ac = (4)^2-4\times(-2)\times(-2) = 16-16 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double: $x_1 = \frac{-(4)}{2\times(-2)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x^2+4x-2$	$-$	0	$-$

Donc : $S = \varnothing$

c) $3x^2+6x+5>0$. Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$3x^2+6x+5$	$+$

Donc : $S=\mathbb{R}$

Exercice1: Résoudre les inéquations suivantes

a) $2x^2-4x+6\geq0$ b) $4x^2-8x+3\leq0$

c) $x^2-3x-10<0$

Solution : a) $2x^2-4x+6\geq0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc : $\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x^2-4x+6$	$+$

Par suite : $S=\mathbb{R}$

b) $4x^2-8x+3\leq0$ $a=4$

Étudions le signe du trinôme :

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$3x^2-4x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

c) $x^2-3x-10<0$ $\Delta=b^2-4ac=49>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1=5$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $S=\left]-2,5\right[$

Exercice2 : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $3x^2+6x-9>0$

2) $x^2+3x-5<-x+2$

Solution : 1) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$. Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est :

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144$.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont : $x_1=\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6+12}{6}=1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $\left]-\infty\,;-3\right[$ et $\left]1\,;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc $S=\left]-\infty\,;-3\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.

2) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes du trinôme.

$x^2+3x-5<-x+2$ Équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont : $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{44}}{2\times1}=-2+\sqrt{11}$ et $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{44}}{2\times1}=-2-\sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^2+4x-7		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $S=\left]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right[$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien