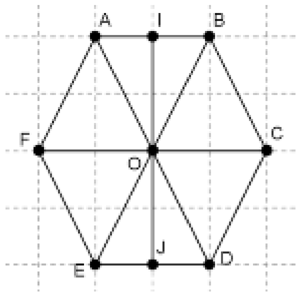
Exercices avec corrections sur les vecteurs

Types d'exercices : Application directe du cours (*) Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***) Assez difficile (****)

Exercice1 : (*) On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O, et I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [ED].
En utilisant les lettres de la figure citer :



1) Deux vecteurs égaux
2) Deux vecteurs de même direction, de sens contraire et de normes différentes
3) Deux vecteurs de même direction, de même sens et de normes différentes
4) Deux vecteurs de direction différentes et de même norme
5) Deux vecteurs opposés

Exercice2 : Compléter les pointillés à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B...}$

$\overrightarrow{...E}=\overrightarrow{F...}+\overrightarrow{G...}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{....}$ $\overrightarrow{H...}=\overrightarrow{....}+\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{...C}+\overrightarrow{...D}+\overrightarrow{....}$

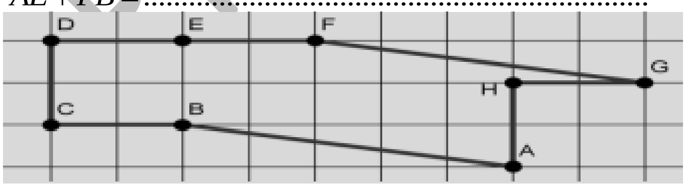
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{...A}+\overrightarrow{A...}$ et $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{...P}+\overrightarrow{....}$

$\overrightarrow{....}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{...M}$ *et* $\overrightarrow{...Y}=\overrightarrow{XJ}+\overrightarrow{....}+\overrightarrow{...R}$

Corrigé : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$
et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$
et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{JM}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XJ}+\overrightarrow{RY}+\overrightarrow{JR}$

Exercice3 : (*) On considère la figure ci-dessous:
Et en n'utilisant que les lettres représentées sur cette figure compléter :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=$ ....
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}=$ ....
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=$ ....
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=$ ....
$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}=$ ....
$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}=$ ....



Corrigé : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FH}$
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{0}$
$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$

Exercice4: (*) On considère les vecteurs :
$\vec{U} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$
Et $\vec{V} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$
Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Corrigé : D'aprés la relation de chasles :
$\vec{U} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{U} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{V} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$
$\vec{V} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{EF} = \vec{0} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}$

Exercice :
Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) Montrer que : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Corrigé : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$ d'aprés la relation de chasles.

Donc : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}\right)$

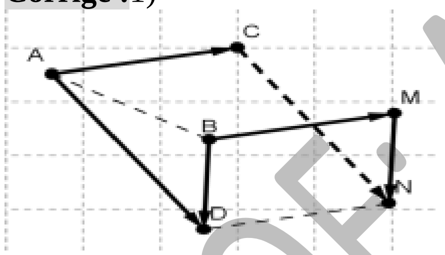
C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CC}$

Donc : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \vec{0}$

Par suite : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Soient A ; B; C ; D des points du plan (P)
1) Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
2) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$

Corrigé :1)



2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Exercice7: (**) Soit ABC est un triangle et M un point du plan et on considère D et E du plan tel que :
$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$
Quelle est la nature des quadrilatères ABCD
et ACBE ? Justifier votre réponse

Corrigé :1) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ signifie $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$
Signifie que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

2) $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$ signifie $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$

Signifie $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ Signifie $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$

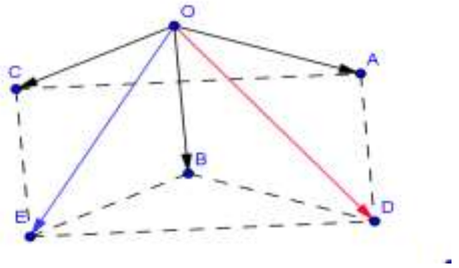
Signifie $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$

Donc : le quadrilatère ACBE est un parallélogramme

Exercice8: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan
et A, B, C, D, O, E des points du plan tel que :
$\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}$
et $\overrightarrow{OE}=\vec{v}+\vec{w}$

1) Faire une figure
2) Montrer que : ACED est un parallélogramme et justifier votre réponse

Corrigé :1) la figure



2) On a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$

Donc ① $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}$

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$ donc ② $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OB}$

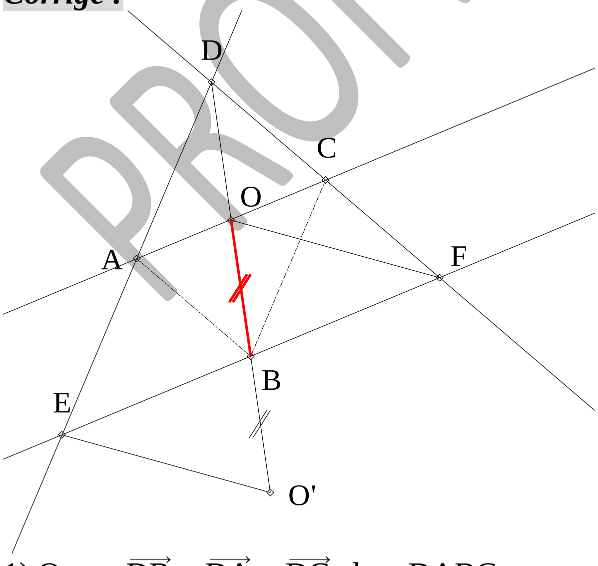
D'après ① et ② on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$

Donc : ACED est un parallélogramme.

Exercice 9 : (**)

1) Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que : $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$
La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.
Démontrer que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$.
En déduire que B est le milieu de [EF].
2) On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B.
Démontrer que : $\overrightarrow{EO'}=\overrightarrow{OF}$

Corrigé :



1) On a *:* $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ alors DABC est un parallélogramme donc : (DA) // (BC).
Par ailleurs on a construit (EB) // (AC).

Le quadrilatère ACBE, ayant ses côtés parallèles deux à deux est un parallélogramme.
En conséquence : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$.
De la même manière, on montre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$.
Conclusion : les deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont égaux car ils sont égaux au même vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Comme $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$, le point B est le milieu du segment [EF] .
2) Par symétrie, B est le milieu du segment [OO'].
Dans le quadrilatère OFO'E, les diagonales ont le même Milieu, donc c'est un parallélogramme.
Et par conséquent, $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$

Exercice 10 : (**) Soit ABCD est un parallélogramme : on pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$

Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

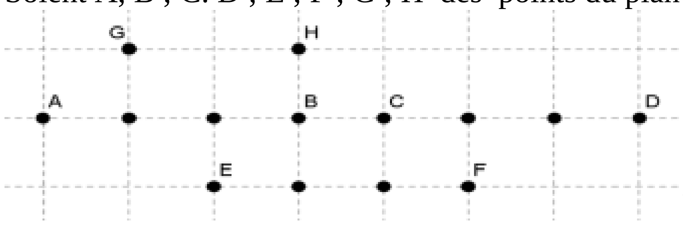
Corrigé : ABCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{j} - \vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \vec{j} - \vec{i}$

On a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{BD} = \vec{j} - 2\vec{i}$

Soient A, B ; C. D ; E ; F ; G ; H des points du plan tels que (voir figure)

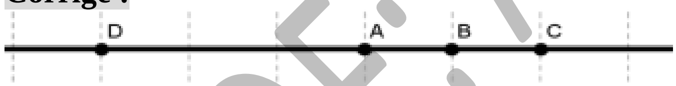


Écrire les vecteurs : $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Corrigé : $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{DA} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice 12 : (*) Soient A, B deux points du plan tels que : $AB = 1cm$
Construire les points C et D tels que : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ et calculer les distances : AC et AD

Corrigé :



On a : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = |2|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AC = |2|\,AB$ et par suite : $AC = 2cm$

On a : $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|-3\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc : $AD = 3AB$ et par suite : $AD = 3cm$

Exercice 13: (*) Soient A, B deux points du plan
et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ tels que : $AB = 6$
et $\|\vec{u}\| = 3$ Calculer : $H = -8\|-\vec{u}\| + \left\|-5\overrightarrow{AB}\right\| + 2$

Corrigé : $H = -8\|-\vec{u}\| + \left\|-5\overrightarrow{AB}\right\| + 2 = -8 \times |-1|\|\vec{u}\| + |-5|\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + 2$

$H = -8 \times 3 + 5 \times 6 + 2 = -24 + 30 + 2 = 8$

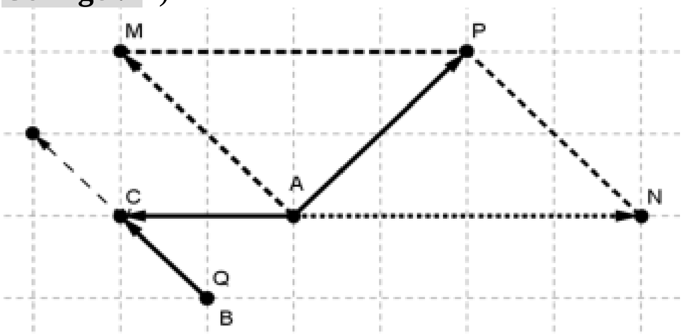
Exercice 14 : (**) Soient A, B, C trois points du plan non alignés
On considère M, N, P et Q du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$

Et $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$

1) Faire une figure

2) En déduire que : $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$ et $B=Q$

Corrigé : 1)



2) On a : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=2\overrightarrow{BA}$

Donc $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$

Et on a : $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AQ}$

Donc $2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AQ}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$ et par suite : $B=Q$

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ et $\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Corrigé : $\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)=2\vec{u}+2\vec{v}-4\times\frac{1}{2}\vec{u}+4\vec{v}$

$\overrightarrow{W_1}=2\vec{u}+2\vec{v}-2\vec{u}+4\vec{v}=6\vec{v}+\vec{0}=6\vec{v}$

$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

$\overrightarrow{W_2}=\vec{u}-3\vec{v}+\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{u}=2\vec{u}+\vec{0}-2\vec{u}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Exercice 16: (**) Soient les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que : $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{u}=2\vec{i}+3\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$

1) Simplifier $\vec{u}$

2) Ecrire $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$; $\vec{v}$

Corrigé : 1) $\vec{u}=2\vec{i}+3\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)-4\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}+3\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{i}-4\vec{j}=-3\vec{i}+2\vec{j}$

2) On a : $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ ① et $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$

Donc : $2\vec{v}=4\vec{i}+2\vec{j}$ ②

②-① donne : $2\vec{v}-\vec{u}=4\vec{i}+2\vec{j}-\left(-3\vec{i}+2\vec{j}\right)=4\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{i}-2\vec{j}$

Donc : $2\vec{v}-\vec{u}=7\vec{i}$ par suite : $\vec{i}=\frac{2}{7}\vec{v}-\frac{1}{7}\vec{u}$

Et on a : $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$ donc : $\vec{j}=\vec{v}-2\vec{i}$

Donc : $\vec{j}=\vec{v}-2\left(\frac{2}{7}\vec{v}-\frac{1}{7}\vec{u}\right)=\vec{v}-\frac{4}{7}\vec{v}+\frac{2}{7}\vec{u}=\frac{2}{7}\vec{u}+\frac{3}{7}\vec{v}$

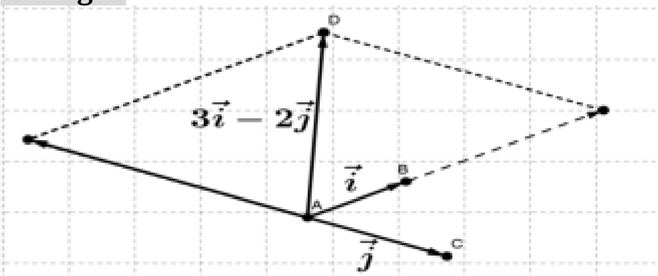
Par suite : $\vec{j}=\frac{2}{7}\vec{u}+\frac{3}{7}\vec{v}$

Soit ABC est un triangle

On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$

Construire le vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Corrigé :



Exercice 18 : (**) A, B et C trois points non alignés.

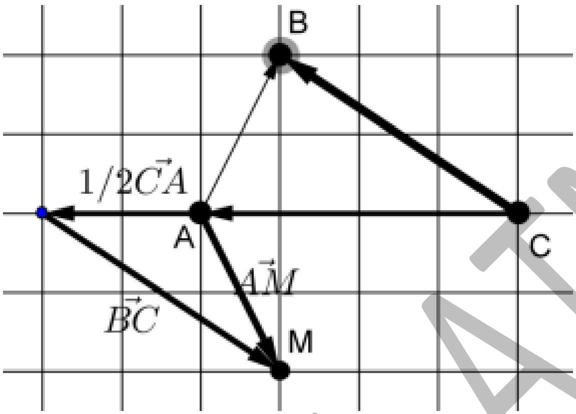
Placer les points M, N et P définis par les égalités suivantes : 1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$ 3) $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

Corrigé :1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

M est le point inconnu, il apparait une fois dans le vecteur $\overrightarrow{AM}$, qui est isolé

On peut donc tout de suite le placer



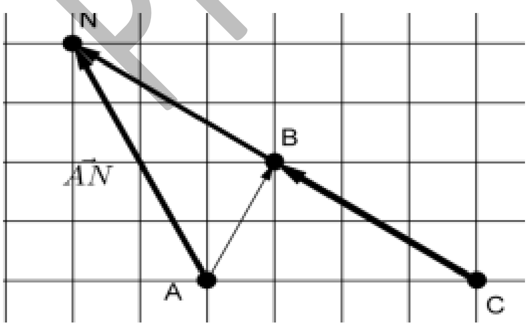
2) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$

N est le point inconnu, il apparait une fois dans le vecteur $\overrightarrow{AN}$

On isole ce vecteur : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ Signifie que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

Et On place le point N



3) $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{BC}$

P est le point inconnu ; il apparait dans les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP}$ on choisit de garder $\overrightarrow{BP}$

Et on transforme $\overrightarrow{AP}$ en faisant apparaitre le vecteur conservé $\overrightarrow{BP}$

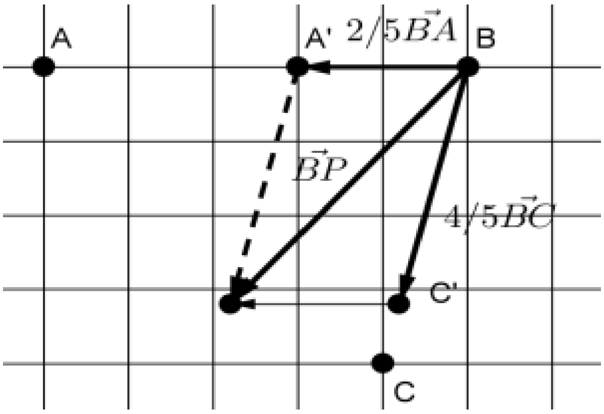
On a : $2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{BC}$

Signifie que : $2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)+3\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{BC}$

Signifie que : $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{BC}$

Signifie que : $5\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$

Signifie que : $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$



Méthode : Regarder combien de fois apparait le point « Inconnu » dans l'égalité.

- S'il apparait dans un seul vecteur, dans un membre de l'égalité, le point peut être placé directement
- S'il apparait dans plusieurs vecteurs, on choisit le vecteur qu'on veut conserver,

On transforme les autres vecteurs contenant le point inconnu grâce à la relation de Chasles et au vecteur conservé. On les remplace dans l'égalité par la nouvelle écriture, puis on isole ce vecteur et on place le point.

Exercice 19: (*) Soient : O, B, C trois points du plan et soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$ et $\vec{v}=\frac{1}{8}\overrightarrow{CB}$

Montrer que : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Corrigé : $\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\times 8\vec{v}=4\vec{v}$

Donc : $\vec{u}=4\vec{v}$ par suite Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Soit ABC est un triangle et soit D le point tel que : $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$

Montrer que : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et construire le point D

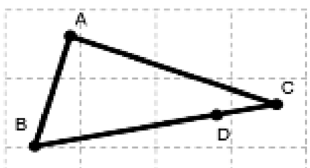
Corrigé : $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$ Signifie $\overrightarrow{BD}=3\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)$

Signifie $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BC}$

Signifie $\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{BC}$

Signifie $\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$

Signifie $4\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



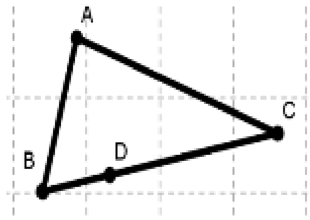
Par suite : Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Exercice 21 : (**) Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que : $7\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

Montrer que Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et construire les points D

Corrigé : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{7}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$



Donc : $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$ et par suite les vecteurs $\overrightarrow{BD}$

et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Exercice22 : (**) Soient A, B et M quatre points du plan tels que : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Montrer que Le point M appartient à la droite (AB)

Corrigé : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : - $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $5\overrightarrow{MA}=-6\overrightarrow{AB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : les points A, B et M sont alignés

Par suite : le point M appartient à la droite (AB)

Soit ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

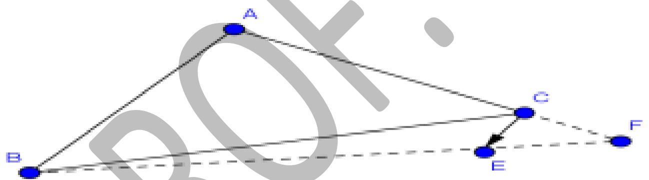
1) Faire une figure

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction de :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

4) En déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé :1) La figure :



2) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

3) Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

$\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ Donc $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires
D'où :Les points E, F et B sont alignés

Soit ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Déduisez que : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Corrigé :1) a) Expression de $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? d'après la relation de Chasles :

On a : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (1)

b) Expression de $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}$ D'où : $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (2)

2) Pour démontrer que les droites (IC) et (BJ)

Sont parallèles il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{IC}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires
Donc : les droites (IC) et (BJ) sont parallèles

Exercice 25 : (**) Soit ABC est un triangle.

1) Soit le vecteur : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) Soit le vecteur : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

a) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires sachant que : $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

Corrigé :1) On a : $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{u}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Par suite : les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2) a) On a : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\vec{v}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) b) $\vec{w}=9\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=-3\left(-3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\vec{w} = -6\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -6\vec{v}$

Par suite : les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

Exercice 26 : (**) Soit ABCD un parallélogramme.

E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$

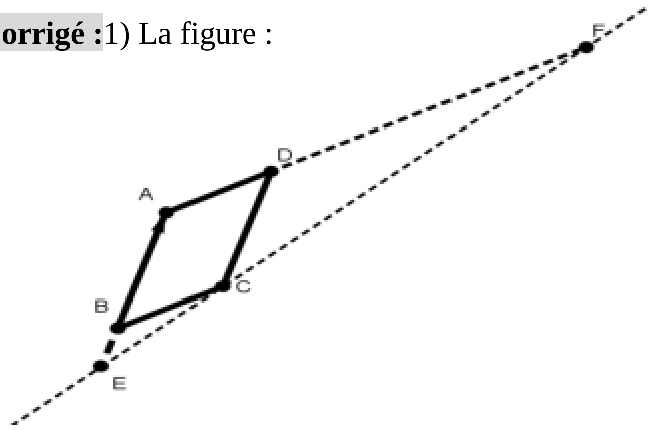
et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Faire une figure

2) Montrer que $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$

3) En déduire que : Les points E, F et C sont alignés

Corrigé :1) La figure :



2)On a : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$

Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{AD}$

Car : $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = 4\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}\right)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$

3) On a : $\overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{EC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

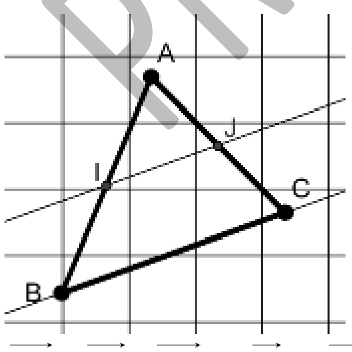
D'où : les points E, F et C sont alignés

Exercice 27 : (**) Soit ABC est un triangle.

Le point I est le milieu du coté $[AB]$ et J est le milieu du coté $[AC]$

Montrer que deux droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Corrigé :



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

Par suite les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

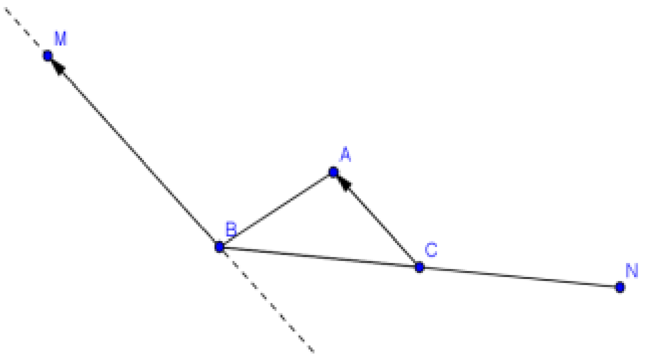
Exercice 28 : Soit ABC est un triangle.

1) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AC}$

2) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : A est le milieu du segment $[MN]$

Corrigé :1) construction du point M



2) Construction du point N : on a : $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC}$ et par suite : C est le milieu du segment $[BN]$

Et on peut construire le point N

A est le milieu du segment 3) Pour montrer que $[MN]$ il suffit de Montrer que : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$?

On a : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Par suite : A est le milieu du segment $[MN]$

Exercice 29 : (**) Soit ABC est un triangle.

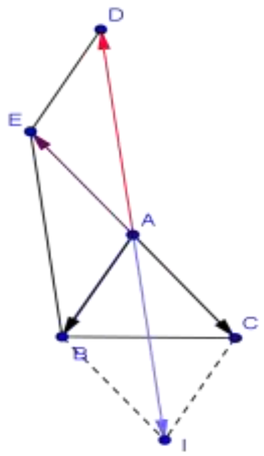
1) Construire le point D tel que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

2) Construire le point E tel que: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

3) Montrer que : A est le milieu du segment $[CE]$

Corrigé :1) Construction du point D

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ Signifie que $\overrightarrow{AD} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$



2) Construction du point E

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Donc $ABED$ est un parallélogramme

3) Pour montrer que A est le milieu du segment $[CE]$

il suffit de Montrer que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$?

On a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

Donc: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

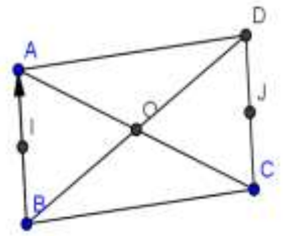
Par suite : A est le milieu du segment $[CE]$

Exercice 30: (**) Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I et J sont les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[CD]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) En déduire que O est le milieu du segment $[IJ]$

Corrigé : 1)



On considère le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$

Et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

De même : On considère le triangle ACD on a J est le milieu du segment $[AB]$ et O est le milieu du segment $[AC]$

Donc : d'après une propriété on a : $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) Pour montrer que O est le milieu du segment $[IJ]$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$??

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et puisque ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

On a donc : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

Et par suite : O est le milieu du segment $[IJ]$

Exercice 31: (***) Soit ABC est un triangle. Et M un point tel que : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$

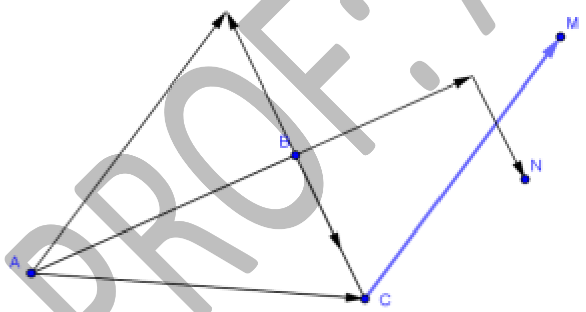
1) Faire une figure et construire le point M

2) Démontrer que : Les points A, B et M sont alignés.

3) Construire le point N tel que : $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

4) Démontrer que : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles

Corrigé : 1) Le point M est obtenu par la construction ci-dessous



2) Pour montrer l'alignement de trois points ou le parallélisme de deux droites on montre la colinéarité de deux vecteurs bien choisis

Pour montrer que les points A, B et M sont alignés il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ Sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

Or : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{AM}=2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=2\overrightarrow{AB}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Par suite les points A, B et M sont alignés.

3) Le point N est obtenu par la construction

ci-dessus.

4) Pour montrer que Les droites (BN) et (AC) sont parallèles il Suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire trouver un réel k tel que ; $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Donc : $\overrightarrow{BN}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$ et par suite : $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Par suite : Les droites (BN) et (AC) sont parallèles.

Exercice 32 : (**) Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que :

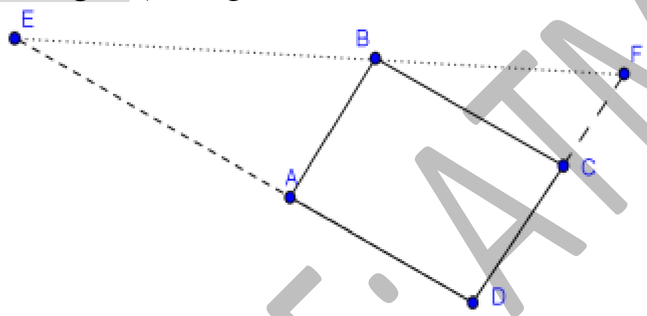
$\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

1) Faire une figure et Montrer que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ et que : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2) a)Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Vérifier que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ et en déduire que : Les points E, F et B sont alignés

Corrigé : 1) La figure :



On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}}$

2)a) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ Car : $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ (ABCD un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$ (1)

Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$ donc : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ (2)

2) b) Vérifions que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$.

$2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC})+3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

4) Déduisons que : Les points E, F et B sont alignés ?

On a : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ donc : $2\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BF}$

D’où les points E, F et B sont alignés.

Exercice 33: (**) Soit ABC est un triangle.

Soient les points E et F tels que :

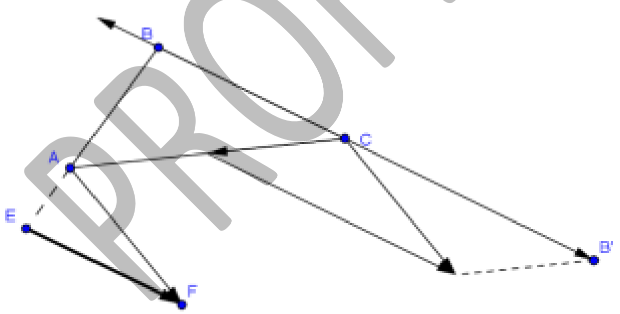
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure.

2) Montrer que : $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) Que peut-on déduire ?

Corrigé : 1) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2) on a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ Donc : $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$:

C’est-à-dire $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}$ et par suite : $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3) On a : $\overrightarrow{EF}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et par suite : les deux droites (EF)et (BC)sont parallèles.

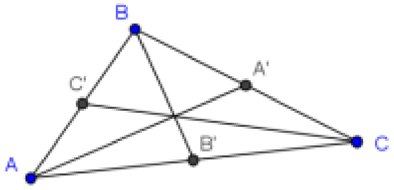
Exercice 34 : (***) Soit ABC est un triangle. Les points : A' et B' et C' sont les milieux respectivement Des segments $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$

1) Faire une figure et vérifier que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ en fonction De : $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Corrigé : 1)



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}+\vec{0}$ Car $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$

(A' est le milieu du segment$[BC]$)

Par suite : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1)

2) a) On a : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2)

On a : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (3)

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$ (1) équivaut à: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Exercice 35 : (***) Soient O ; A ; B ; M ; N et P des points du plan tels que :

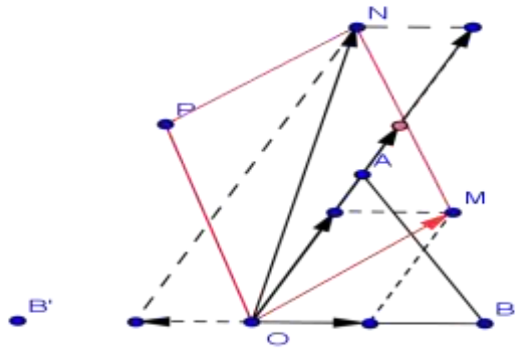
$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{ON}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

1) Faire une figure

2) Montrer que : Les points : N , M et B sont alignés

3) Montrer que : $OMNP$ est un parallélogramme

Corrigé : 1) la figure



2) Montrons que Les points : N , M et B sont alignés ?

On a : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$

Donc : $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}$

Donc : $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ Donc : $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Et on a : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ON}$ donc : $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}$ Donc: $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

Donc: $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{OA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ on a alors: $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BM}$.

Par suite : Les points : N , M et B sont alignés

3) Montrons que : $OMNP$ est un parallélogramme ?

On a : $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON}$ donc $\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$

Donc: $\overrightarrow{PN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Donc: $\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ alors: $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{OM}$

Cela signifie que : $OMNP$ est un parallélogramme

Exercice 36 : (***) ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$

3. a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AE}$

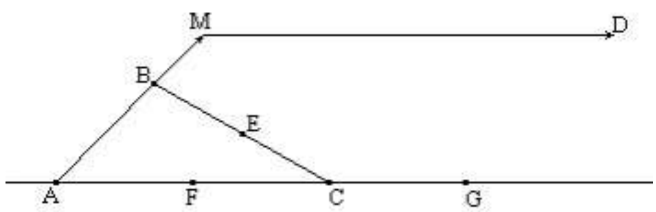
c) Que peut-on alors conclure ?

4. a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C et montrer que : $\overrightarrow{GA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$ puis que : $\overrightarrow{GD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Corrigé : 1)



2) Dans le triangle ABC, E est le milieu de [BC]

F est le milieu de [AC] Donc d'après le théorème des milieux : $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{FE}$

3)a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) $3\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

4. a) $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ nous donne $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

On a alors $-2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (ceci nous permet alors de placer le point M).

b) G est le symétrique de F par rapport à C

D'où C est le milieu de [FG] et $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{FC}$.

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

D'où $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ c) On a alors : $\overrightarrow{GD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

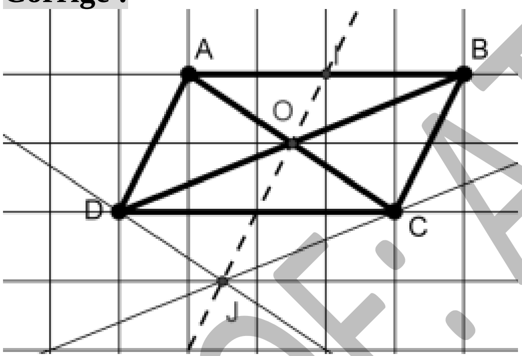
D'où : $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AM}$ et le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

Exercice 37 : (****) Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu du segment $[AB]$

La parallèle à (AC) passant par D coupe la parallèle à (BD) passant par C en J

Montrer que : les points : O , I et J sont alignés.

Corrigé :



Il suffit de montrer que : $\overrightarrow{OJ}=k\overrightarrow{OI}$ avec $k\in\mathbb{R}^*$

L'examen de la figure montre que: $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ peuvent s'exprimer en fonction de $\overrightarrow{BC}$

Dans le triangle ABC on a I est le milieu du segment $[AB]$ et O le milieu du segment $[AC]$

Donc d'aprés le théorème des milieux :

$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{OI}$ (1)

Par construction $OCJD$ est un parallélogramme d'où : $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

Comme O le milieu du segment $[BD]$ alors : $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$

D'où : $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{BC}$ (2)

D'aprés Les égalités (1) et (2)

On a alors : $\overrightarrow{OJ}=-2\overrightarrow{OI}$

Par suite les points : O, I et J sont alignés.

Exercice 38 : (***) ABC est un triangle.

Soient D et E deux points du plan tels que : $3\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$

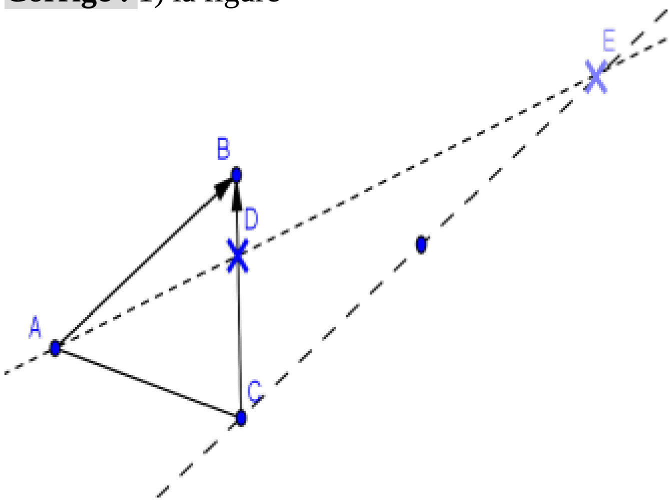
1) Faire une figure

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) b) En déduire que les points : A , E et D sont alignés.

3) Montrer que : $AD\le\frac{1}{3}\left(CE+AC\right)$

Corrigé : 1) la figure



2) a) On a: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On a: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$ Donc : $\boxed{\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}$

2) b) On a: $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

Par suite les points : A , E et D sont alignés

3) On a: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)\right\|=\left|\frac{1}{3}\right|\left\|\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}\right)\right\|$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\le\frac{1}{3}\left(\left\|\overrightarrow{CE}\right\|+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)$

Donc : $AD\le\frac{1}{3}\left(CE+AC\right)$

Exercice 39: (****) ABC est un triangle et I un point du plan tel que : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

1) Représenter le point I

2) Soit M le point d'intersection des droites : (AI) et (BC)

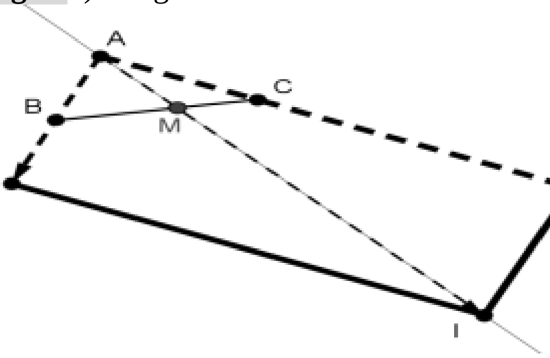
On pose : $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{MB}$

Avec x et y des réels

a) Montrer que : $(x-5)\overrightarrow{AM} = (2-3y)\overrightarrow{MB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AI}$

Corrigé : 1) la figure



2) On a : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ Donc : $\overrightarrow{AI} = 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) + 3\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right)$

Or on sait que : $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{MB}$ donc : $x\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) + 3\left(\overrightarrow{AM} - y\overrightarrow{MB}\right)$

Donc : $x\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AM} - 3y\overrightarrow{MB}$

Donc : $x\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AM} + (2-3y)\overrightarrow{MB}$

Donc : $(x-5)\overrightarrow{AM} = (2-3y)\overrightarrow{MB}$

3) On a : $(x-5)\overrightarrow{AM} = (2-3y)\overrightarrow{MB}$ et puisque les points : A ; B ; M ne sont pas alignés

Alors on a nécessairement : $x-5=0$ *et* $2-3y=0$

Donc : $x=5$ *et* $y=\frac{2}{3}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AM}$ alors : $\overrightarrow{AI} = 5\overrightarrow{AM}$ et par suite : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AI}$.

Vecteur !!!!!

En mathématiques, un **vecteur** est un objet généralisant plusieurs notions provenant de la géométrie (couples de points, translations, etc.), de l'algèbre (« solution » d'un système d'équations à plusieurs inconnues), ou de la physique (forces, vitesses, accélérations, etc.).

Rigoureusement axiomatisée, la notion de vecteur est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire. En ce sens, un vecteur est un élément d'un espace vectoriel, ce qui permet d'effectuer des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Un *n*-plait peut constituer un exemple de vecteur, à condition qu'il appartienne à un ensemble muni des opérations adéquates