Exercices avec corrections sur la Notion d'arithmétique

Types d'exercices :
Application directe du cours (*)
Difficulté moyenne (**)
Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$-4...\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}...\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}...\mathbb{N}$;
$12-32...\mathbb{N}$; $\sqrt{25}...\mathbb{N}$; $2,12...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}...\mathbb{N}$
$2.12...\mathbb{N}$; $\pi...\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}...\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}...\mathbb{N}$;
$\mathbb{N}^*...\mathbb{N}$; $\{0\}...\mathbb{N}$; $10...\{1;8;9;11;12\}$; $5.....\varnothing$

Corrigé : $-4.\notin\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}\in\mathbb{N}$;
$-\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$; $12-32\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{25}\in\mathbb{N}$; $2,12\notin\mathbb{N}$;
$0\notin\mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{100}}{2}\in\mathbb{N}$; $2.12\notin\mathbb{N}$; $\pi\notin\mathbb{N}$;
$\{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$;
$\{0\}\subset\mathbb{N}$; $10\notin\{1;8;9;11;12\}$; $5\notin\varnothing$

Exercice2 : (*) Déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59

Corrigé : Les multiples de 9 s'écrivent sous la forme : $9k$ avec : $k\in\mathbb{N}$ on a donc :
$23\le 9k\le 59$ Signifie que : $23/9\le k\le 59/9$
Signifie que : $2.5\le k\le 6.5$ donc : $k\in\{3;4;5;6\}$
Par suite : les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59 sont : 9×3 ; 9×4; 9×5; 9×6
C'est à dire: 27 ; 36 :45 ; 54

Exercice3 : (*) Décomposer en produit de facteurs premiers
Le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

Corrigé : <u>Technique</u> (1):
$1344 = 2^6\times 3^1\times 7^1$
Le nombre de diviseurs de 1344 est :
$(6+1)\times(1+1)\times(1+1)$
$=7\times2\times2=28$

<u>Technique</u> (1)

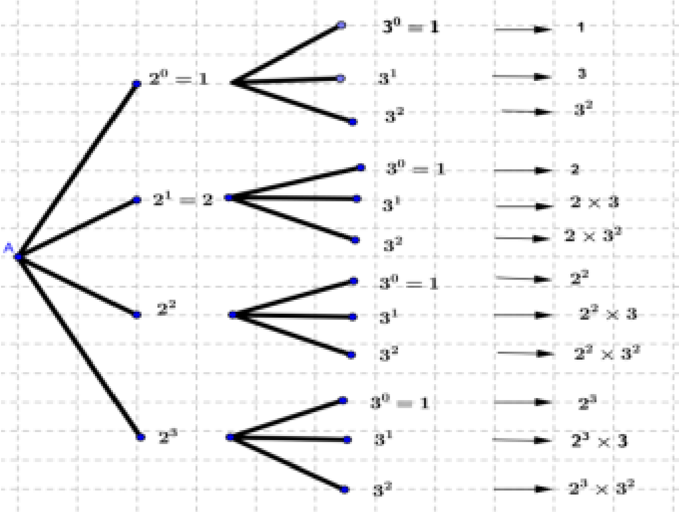
1344	**2**
672	**2**
336	**2**
168	**2**
84	**2**
42	**2**
21	**3**
7	**7**
1	

Exercice4 : (*) Déterminer tous les diviseurs communs à 375 et 2070

Corrigé : Méthode1 :
Les diviseurs de 375 sont 1, 3, 5, 15, 25, 75,125 et 375 et Les diviseurs de 2070 sont :
1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414 ,690, 345, 1035, 2070
les diviseurs communs à 375 et 2070 sont donc :
1, 3 ,5, 15.
Méthode2 : les diviseurs communs à 375 et 2070 sont aussi les diviseurs de leur PGCD.
On a : $375 = 3\times 5^3$; $2070 = 2\times 3^2\times 5\times 23$
On applique la règle suivante pour calculer le PGCD :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (375; 2070) $=3\times 5=15$
Et les diviseurs de 15 sont : 1, 3 ,5, 15.
Qui sont aussi les diviseurs communs de 375 et 2070

Exercice5 : (*) Déterminer les diviseurs de 72

Corrigé : La décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel permet d'obtenir tous ses diviseurs de manière systématique : $72 = 2^3\times 3^2$ il y a :
$(3 +1)\times(2 +1) = 4\times 3 = 12$.
On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



Donc : les diviseurs sont : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72

Exercice6 : (*) Déterminer le nombre de diviseurs de 175

Corrigé : Methode1 : On utilise les critères de divisibilités :On a : $\sqrt{175}=13,228...$On prend seulement sa partie entière : 13

Nous déterminons les nombres inferieurs ou égales à 13 qui sont des diviseurs de 175

Qui sont : **1 ; 5 ; 7** après on divise 175 par 1 on trouve **175** et on divise 175 par 5 on trouve 35

Et on divise 175 par 7 on trouve **25**

Nous obtenons ainsi les diviseurs suivants de 175:

1 ; 5 ; 7 ; 25 ; 35 ; 175 il y'a donc 6 diviseurs de 175

Methode2 : Nous utilisons la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre : *175*

En effet on a : $175=5\times5\times7=5^2\times7^1$

On applique la règle suivante :

« Le nombre de diviseurs est égal à :

(1ere exposant +1) ×(2ere exposant +1) ×…»

Donc : le nombre de diviseurs de 175 est :

(2 +1) ×(1 +1) = 3 × 2 = 6

Exercice7 : (*) Deux entiers naturels m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (Autres que m) est égale à n et simultanément la Somme des diviseurs de n (autres que n) Est égale à m.

1) Décomposer en produit de nombres premiers 220 et 284.

2) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

Corrigé :1) $220=2^2\times5\times11$ et $284=2^2\times71$.

2)Les diviseurs de 220 sont : 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110 ;220.

Les diviseurs de 284 sont 1;2;4;71;142;284

Calculons la somme des diviseurs de 220 sauf 220 :

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

Et Calculons la somme des diviseurs de 284 sauf 284:

$1+2+4+71+142=220$

Conclusion : 220 et 284 sont deux entiers amicaux

Exercice8 : (**) Si on divise 4 373 et 826 par un même nombre entier naturel b on obtient 8 et 7 pour restes. Déterminer b.

Corrigé : On écrit les deux divisions euclidiennes :

$4373=b\times q_1+8$ et $826=b\times q_2+7$

Donc : $b\times q_1=4373-8=4365$ et $b\times q_2=826-7=819$

Donc simultanément : b est un diviseur commun de : 4365 et 819

On cherchant la liste des diviseurs commun de : 4365 et 819 on trouve que : b = 9

Exercice9 : (**) Déterminer les chiffre x et y pour que :

1) Le nombre : $M=95x2x31x$ soit divisible par 3 et un nombre impair.

(Déterminer tous les nombres possibles)

2) Le nombre : $N=12x34y6$ soit multiple de 4 et de 9 (Déterminer tous les nombres possibles)

Corrigé : 1) On a : $0\le x\le 9$.

Le nombre : $M=95x2x31x$ est impair

Donc : $x\in\{1;3;5;7;9\}$

Le nombre : M est divisible par 3

Equivaut à : $9+5+x+2+x+3+1+x=3k$; $k\in\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $20+3x$ un multiple de 3

On donnant à x les valeurs $1;3;5;7;9$.

On trouve que : $x=5$ (seul vérifie).

Par suite le nombre est : 95525315.

2) On a : $x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

et $y\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Le nombre : $N=12x34y6$ est multiple de 4 signifie que : le nombre $y6$ est un multiple de 4 .

Donc : $y\in\{1;3;5;7;9\}$.

Le nombre : $N=12x34y6$ est multiple de 9

Signifie : $1+2+x+3+4+y+6=16+x+y$ est un multiple de 9

Si $y=1$ alors $x=1$ et $16+x+y=18$

Si $y=3$ alors $x=8$ et $16+x+y=27$.

Si $y=5$ alors $x=6$ et $16+x+y=27$

Si $y=7$ alors $x=4$ et $16+x+y=27$

Si $y=9$ alors $x=2$ et $16+x+y=27$

D'où les couples $(x;y)$ solutions sont :

$(1;1);(3;8);(5;6);(7;4);(9;2)$.

Donc : on donnant a x les valeurs entre 0 et 9

On trouve que $x=8$ par suite le nombre est : 5328

Exercice10 : (**) Soit $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ tels que a est un multiple de 13 et $a\times b=273$ et $27\le a\le 50$

Déterminer a et b

Corrigé : les multiples de 13 s'écrivent sous la forme : $13k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

On a donc : $27\le 13k\le 50$

Ce qui signifie que : $27/13\le k\le 50/13$

Donc : $2,07\le k\le 3.84$ Avec : $k\in\mathbb{N}$

Donc : $k=3$ Par suite : $a=13\times3=39$

Et on a : $a\times b=273$équivaut à $39\times b=273$

C'est -à -dire : $b=\dfrac{273}{39}=7$.

Exercice11 : (*) On pose : $x=3\times5\times7\times12$ et $y=2\times5\times3\times5$

Sans calculer x et y monter que :

1)75 divise y

2)105 divise x

Corrigé :1) On a $y=2\times5\times3\times5$ donc $y=2\times75$ par suite : 75 divise y

2) On a $x=3\times5\times7\times12$ donc $x=105\times12$ par suite : 105 divise x

Exercice12 : (*) $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$;

1) Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.

2) Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair

3) Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

Corrigé : 1) On a : a est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $a=2k$

b Impair alors il existe $k'\in\mathbb{N}$: $b=2k'+1$

Donc : $a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$

avec: $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Par suite : $a+b$ est un nombre impair

2) a est impair donc : $a=2k+1$avec $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2k+1)=(2k)^2+2\times2k\times1+1^2=4k^2+4k+1$

Donc : $a^2=2(2k^2+2k)+1=2k''+1$; $k^2+2k=k''\in\mathbb{N}$

Par suite : a^2 est un nombre impair

3) On suppose que a est pair alors a^2 est un nombre pair or a^2 est impair

Donc : contradiction et par suite : a est un nombre impair (Raisonnement par l'absurde)

Exercice13 : (*) 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair

2) Montrer que : si $n\in\mathbb{N}$ alors : n^2+n est un nombre pair et en déduire que les nombres : n et n^2 ont la même parité.

Corrigé :1) Soit $n\in\mathbb{N}$(un entier naturel quelconque) $n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple: 2×3ou 3×4ou 100×101…

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :

1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k$ par suite :

$n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2\left[k\times(2k+1)\right]=2k'$

avec $k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) $n^2+n=n\times(n+1)$ donc : c'est un nombre pair et par suite : n^2 et n ont la même parité.

Car si non n^2+n sera un nombre impair.

Exercice14 : (*) et (**) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

1) 375^2+648^2 2) $\left(25^3+24^3\right)^7$ 3) $2n+16$

4) $10n+5$ 5) $18n+4m+24$ 6) $2n^2+7$

7) $8n^2+12nm+3$ 8) $26n+10m+7$

9) $n^2+11n+17$ 10) $n^2+7n+20$

11) $(n+1)^2+7n^2$ 12) n^2+5n

13) n^2+8n 14) n^3-n

15) $5n^2+n$ 16) $4n^2+4n+1$

17) $n^2+13n+17$ 18) $n+(n+1)+(n+2)$

19) $5n^2+7n+4$.

Corrigé :1) 375^2+648^2 : 648^2 Est paire Car le carré d'un nombre pair.

375^2 Est impair car le carré d'un nombre impair.

375^2+648^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

2) 24^3est paire car le produit de nombres pairs et 25^3est impair car le produit de nombres impairs

Donc : 25^3+24^3 c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

Et par suite : $\left(25^3+24^3\right)^7$ est impair car le produit de nombres impairs.

3) $2n+16=2(n+8)=2\times k$ avec $k=n+8\in\mathbb{N}$

Et par suite : $2n+16$ est un nombre pair.

4) $10n+5=2(5n+2)+1=2\times k+1$

Avec $k=5n+2\in\mathbb{N}$

Par suite : $10n+5$ est un nombre impair.

5) $18n+4m+24=2(9n+2m+12)=2k$

avec : $k=9n+2m+12\in\mathbb{N}$.

Donc : $18n+4m+24$ est un nombre pair.

6) $2n^2+7=2n^2+6+1=2\left(n^2+3\right)+1=2k+1$

avec : $k=n^2+3\in\mathbb{N}$ par suite : $2n^2+7$ est impair.

7) $8n^2+12nm+3=2\left(4n^2+4nm+1\right)+1=2k+1$

avec : $k=4n^2+4nm+1\in\mathbb{N}$

Donc : $8n^2+12nm+3$ est un nombre impair.

8) On a : $26n+10m+7=2\left(13n+5m+3\right)+1=2k+1$

avec : $k=13n+5m+3\in\mathbb{N}$

Donc $26n+10m+7$ est un nombre impair.

9) On a : $n^2+11n+17=n^2+n+10n+16+1$

$n^2+11n+17=n\left(n+1\right)+2\left(5n+8\right)+1$

Et on a : $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que :

$n\left(n+1\right)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+11n+17=2k+2\left(5n+8\right)+1$

Donc : $n^2+11n+17=2\left(k+5n+8\right)+1=2k'+1$

Avec $k'=k+5n+8$

Par suite : $n^2+11n+17$ est un nombre impair.

10) On a: $n^2+7n+20=n^2+n+6n+20=n\left(n+1\right)+2\left(3n+10\right)$

Et on a : $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

$n^2+7n+20=2k+2\left(3n+10\right)=2\left(k+3n+10\right)=2k'$

Avec $k'=k+3n+10$

Donc $n^2+7n+20$ est un nombre pair.

11) $\left(n+1\right)^2+7n^2=n^2+2n+1+7n^2=8n^2+2n+1$

$=2\left(4n^2+n\right)+1=2k+1$

Avec $k=4n^2+n$ et $k\in\mathbb{N}$.

Donc $\left(n+1\right)^2+7n^2$ est un nombre impair.

12) Etude de la parité de n^2+5n :

$n^2+5n=n^2+n+4n=n\left(n+1\right)+4n$

Or $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs

Donc : c'est un nombre pair.

Donc : $n^2+5n=2k+4n=2\left(k+2n\right)=2k'$

avec $k'=k+2n\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2+5n est un nombre pair.

13) Etude de la parité de n^2+8n :

1ére cas : <u>si n pair.</u>

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $8n=2\times4n=2\times k$ est pair

On a : n^2+8n c'est la somme de deux nombres pairs donc : n^2+8n est pair.

2ére cas : <u>si n impair.</u>

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $8n=2\times4n=2\times k$ est pair

On a : n^2+8n c'est la somme d'un nombre impair Et un nombre pair donc : n^2+8n est impair.

14) Etude de la parité de : n^3-n ; $n\in\mathbb{N}$

$n^3-n=n\left(n^2-1\right)=n\left(n^2-1^2\right)=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)$.

Donc : $n^3-n=\left(n-1\right)\times n\times\left(n+1\right)$ est le produit de trois nombres consécutifs ($n\times\left(n+1\right)$ est pair)

Donc : n^3-n est un nombre pair.

15) Etude de la parité de $5n^2+n$ $n\in\mathbb{N}$:

$5n^2+n=4n^2+n^2+n=4n^2+n\left(n+1\right)=2\times2n^2+2k$

$5n^2+n=4n^2+n^2+n=2\times\left(2n^2+k\right)=2\times k'$

Avec : $k'=6n+8$ et $k''=k+k'$

Car $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : $5n^2+n$ est un nombre pair.

16) Etude de la parité de : $4n^2+4n+1$ $n\in\mathbb{N}$

$4n^2+4n+1=\left(2n\right)^2+2\times2n\times1+1^2=\left(2n+1\right)^2$

Donc : $4n^2+4n+1$ est un nombre impair car $2n+1$ est un nombre impair et la carré d'un nombre impair est impair

17) Etude de la parité de $n^2+13n+17$:

$n^2+13n+17=n^2+n+12n+16+1$

$n^2+13n+17=n(n+1)+2\left(6n+8\right)+1$

On a : $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Par suite : $n^2+13n+17=2k+2k'+1=2\left(k+k'\right)+1=2k''+1$

Avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2+13n+17$ est un nombre impair

18) Etude de la parité de $n+\left(n+1\right)+\left(n+2\right)$:

1cas : si n pair : $n+\left(n+1\right)+\left(n+2\right)$ est impair

2cas : si n impair alors $n+\left(n+1\right)+\left(n+2\right)$ est pair

19) Etude de la parité de $5n^2+7n+4$:

$5n^2+7n+4=5n^2+5n+2n+4=5n(n+1)+2\left(n+2\right)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair .

Par suite : $5n^2+7n+4=5\times 2k+2k'=2(5k+k')=2k''$

Avec : $k'=n+2\in\mathbb{N}$ et $k''=5k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $5n^2+7n+4$ est un nombre pair

Exercice15 : (**) 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Corrigé : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$ donc : $n+(n+1)+(n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)=3k$

avec : $k=n+1\in\mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ Avec $k\in\mathbb{N}$:

On a donc :

$(2k+1)+[(2k+1)+2]=4k+4=4(k+1)=4k'$

Avec : $k'=k+1\in\mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice16: (**) Soient : $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{N}$ tel que : $n-1$ soit un multiple de 3.

Montrer que : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3.

Corrigé : On a : $n-1$ soit un multiple de 3

Donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $n-1=3k$

C'est-à-dire : $n=3k+1$

Donc: $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k$

$n^2-1=3(3k^2+2k)=3k'$ Avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3

Exercice17 : (**) Soient : x ; y ; a et b des entiers naturels et soit $d\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : si d divise x et d divise y alors d divise $ax+by$ et d divise $ax-by$ ($ax\succ by$)

2) On pose : $x=5n+3$ et $y=7n-1$ avec $n\in\mathbb{N}$

Montrer que : tout diviseur de x et y est un diviseur de 26.

Corrigé : 1) d divise x signifie que : $x=d\times k$ Avec $k\in\mathbb{N}$

Et d divise y signifie que : $y=d\times k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $ax+by=a\times d\times k+b\times d\times k'$

$ax+by=d(a\times k+b\times k')=d\times k''$

Avec : $k''=a\times k+b\times k'\in\mathbb{N}$

De même : $ax-by=a\times d\times k-b\times d\times k'$

$ax-by=d(a\times k-b\times k')=d\times k''$

Avec : $k''=a\times k-b\times k'\in\mathbb{N}$

Par conséquent: d divise $ax+by$ et d divise $ax-by$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $x=5n+3$ et $y=7n-1$

Et soit d un diviseur de x et y alors d'après la question 1) d est aussi diviseur de : $7x-5y$

Donc : d divise : $7(5n+3)-5(7n-1)$

C'est-à-dire : d divise : $35n+21-35n+5$

Donc : d divise : 26 et par suite : tout diviseur de x et y est un diviseur de 26

Exercice18: (**) Soient : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ et on pose : $N=(n+4m)^2-n^2$

Montrer que : N est un entier naturel divisible par 8

Corrigé : 1)

$N=(n+4m)^2-n^2=(n+4m+n)(n+4m-n)=8m(n+2m)$

Puisque : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ alors : $8m(n+2m)\in\mathbb{N}$

Et par suite : $N\in\mathbb{N}$

Et on a : $N=8m(n+2m)=8k$ avec : $k=m(n+2m)\in\mathbb{N}$

Par suite : N est un entier naturel divisible par 8

Exercice19 : (***) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs

2) Montrer que : le nombre n^4-n^2+16 est un multiple de 4

Corrigé : 1)a)on a :

$n^2+3n+4=n^2+n+2n+4=n(n+1)+2(n+2)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$2(n+2)=2k$ Avec $k=n+2\in\mathbb{N}$ est aussi pair

Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)+2(n+2)$ est pair car c'est la somme deux nombres pairs

b) On a : $n^2-3n+4=n^2+n-4n+4=n(n+1)-2(2n-2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$2(2n-2)=2k$ Avec $k=2n-2\in\mathbb{N}$ est aussi pair.

Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)-2(n-2)$ est pair car c'est la différence de deux nombres pairs.

2) ***1ere méthode*** : On a : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs

Donc : $n^2+3n+4=2k$ et $n^2-3n+4=2k'$

Avec : $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$

Par suite : $\left(n^2+3n+4\right)\left(n^2-3n+4\right)=\left(2k\right)\left(2k'\right)=4kk'$

Équivaut à : $\left(\left(n^2+4\right)+3n\right)\left(\left(n^2+4\right)-3n\right)=4kk'$

Équivaut à : $\left(n^2+4\right)^2-9n^2=4kk'$

Équivaut à : $n^4+8n^2+16-9n^2=4kk'$

Équivaut à : $n^4-n^2+16=4kk'=4k''$

Avec : $k''=kk' \in \mathbb{N}$

Équivaut à dire que n^4-n^2+16 est un multiple de 4.

2ere méthode : On a :

$n^4-n^2+16=n^2\left(n^2-1\right)+16=n^2\left(n^2-1^2\right)+16$

$n^4-n^2+16=n^2\left(n-1\right)\left(n+1\right)+16=\left(n-1\right)n\times n\times\left(n+1\right)+16$

Or : on a : $n\left(n+1\right)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n\left(n+1\right)$ est un nombre pair

Et aussi : $\left(n-1\right)\times n$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n\left(n+1\right)$ est un nombre pair.

$n^4-n^2+16=2k\times 2k'+16=4kk'+16=4\left(kk'+4\right)=4k''$

Avec : $k''=kk'+4 \in \mathbb{N}$

Par suite : n^4-n^2+16 est un multiple de 4

Exercice20: (**) Soit n est un nombre entier naturel tel que : $n \geq 4$ et on pose : $B=n^4-16$

1) Montrer que : $n+2$ et $n-2$ et n^2+4 sont des diviseurs de B

3) Trouver quatre autre diviseurs de B

Corrigé : 1) $B=n^4-16=\left(n^2\right)^2-\left(2^2\right)^2=\left(n^2-2^2\right)\left(n^2+2^2\right)$

$B=n^4-16=\left(n-2\right)\left(n+2\right)\left(n^2+4\right)$

Donc : $n+2$ *et* $n-2$ *et* n^2+4 sont des diviseurs de B.

2) On a : $B=\left(n-2\right)\left(n+2\right)\left(n^2+4\right)$

Donc : 1 et B et $\left(n+2\right)\left(n^2+4\right)$ et $\left(n-2\right)\left(n^2+4\right)$

Sont aussi des diviseurs de B.

Exercice21 : (**)(***) Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Développer: $\left(n+1\right)^2-n^2$

2) Déduire que tout nombre impair peut s'écrire par La différence des carrés de deux nombres entiers Consécutifs. (C'est-à-dire : si n impair, il existe deux nombres consécutifs a, b et $n=b^2-a^2$)

3) Appliquer l'affirmation précédente et écrire les nombres 31 ; 2019 ; 2021 sous forme de deux carrés consécutifs

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que le nombre n^2+n+7 est impair.

5) Appliquer l'affirmation précédente sur le nombre n^2+n+7

Corrigé : 1) On a : $\left(n+1\right)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$

2) On a $\left(n+1\right)^2-n^2=2n+1$ et le nombre $2n+1$ est impair pour tout $n \in \mathbb{N}$ et n et $n+1$ sont deux nombres consécutifs.

Donc : tout nombre impair s'écrit comme différence de deux carrés consécutifs.

3) Application : $30=2\times 15+1$ est impair

et ($2n+1=\left(n+1\right)^2-n^2$)

Donc : $30=\left(15+1\right)^2-15^2=16^2-15^2$

De même : $2019=2\times 1009+1$ est impair

$2019=\left(1009+1\right)^2-1009^2=1010^2-1009^2$

De même : $2021=2\times 1010+1$ est impair

$2021=\left(1010+1\right)^2-1010^2=1011^2-1010^2$

4) On a : $n^2+n+7=n^2+n+6+1=n(n+1)+2\times 3+1$

On a : $n\left(n+1\right)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$n^2+n+7=2k+2\times 3+1=2\left(k+3\right)+1=2k'+1$

Avec : $k'=k+3 \in \mathbb{N}$

Donc n^2+n+7 est un nombre impair.

5) On a : $n^2+n+7=2k+2\times 3+1$ avec $n(n+1)=2k$

c'est-à-dire : $\dfrac{n(n+1)}{2}=k$

Donc : $n^2+n+7=2\left(k+3\right)+1$

Et d'après 2) on a : $n^2+n+7=\left(k+3+1\right)^2-\left(k+3\right)^2$

Donc : $n^2+n+7=\left(k+4\right)^2-\left(k+3\right)^2$ avec : $k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice22 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair

1) Vérifier que : n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 4

3) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 8

4) En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

***Corrigé :*1)** si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors : $3^2-1=8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors : $7^2-1=48$ est un multiple de 8

2) n *est impair* donc : $n=2k+1$.

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times 2k\times 1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4(k^2+k)=4\times k'$

Avec $k'=k^2+k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2-1 est un multiple de 4.

3) On a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : $k(k+1)=2k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2-1=8k'$ et par suite :

n^2-1 est un multiple de 8.

4) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$.

Et on a trouvé que: $n^2-1=4k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

Et on a :

$n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc :

$n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$

avec : $k'''=k'k''\in\mathbb{N}$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16.

5) On a trouvé que : n^2-1 est un multiple de 8

donc : $n^2-1=8k$ c'est-à-dire : $n^2=8k+1$

De même on a : m^2-1 est un multiple de 8

Donc : $m^2-1=8k'$ c'est-à-dire : $m^2=8k'+1$

$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8$

$n^2+m^2+6=8(k+k'+1)=8k''$ Avec : $k''=k+k'+1\in\mathbb{N}$

Par conséquent : n^2+m^2+6 est un multiple de 8.

Exercice23 : (***) Soit $n\in\mathbb{N}$

1 Soit $n\in\mathbb{N}$; Montrer que :

$(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$.

2) Montrer que : 10101 est divisible par 111.

3) Montrer que : 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

Corrigé : 1)Soit $n\in\mathbb{N}$

$(n^2+1-n)(n^2+1+n)=((n^2+1)-n)((n^2+1)+n)=(n^2+1)^2-n^2$

$(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+2n^2+1-n^2=n^4+n^2+1$

Donc : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) On a : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ Pour : $n=10$

On a donc : $(10^2+1-10)(10^2+1+10)=10^4+10^2+1$

Donc : $10000+100+1=(100+1-10)(100+1+10)$

Donc : $10101=91\times 111$ c'est-à-dire que : 10101 Est divisible par 111

3) On a : $(n^2+1-n)(n^2+1+n)=n^4+n^2+1$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ Pour : $n=10^2$

On a donc : $(10^4+1-10^2)(10^4+1+10^2)=10^8+10^4+1$

Et puisque : $10^4+1+10^2=10101=91\times 111$ est divisible par 111 alors :

$10^8+10^4+1=(10^4+1-100)\times 91\times 111=k\times 111$

Avec : $k=(10^4+1-100)\times 91\in\mathbb{N}$

Par conséquent : 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

Exercice24 : (***) Soit $n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $n(n^2+5)$ est un multiple de 3

Indication : Etudier les cas : $n=3k$; $n=3k+1$

Et $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Corrigé : Soit $n\in\mathbb{N}$ il y'a trois façons d'écrire n :

$n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas : en effet :

1ére cas : si $n=3k$:

$n(n^2+5)=3k((3k)^2+5)=3[k(9k^2+5)]=3k'$

Avec : $k'=k(9k^2+5)\in\mathbb{N}$

Donc : $n(n^2+5)$ est un multiple de 3

2ére cas : si $n=3k+1$:

$n(n^2+5)=(3k+1)((3k+1)^2+5)$

Donc : $n(n^2+5)=(3k+1)(9k^2+6k+6)$

Donc : $n(n^2+5)=3(3k+1)(3k^2+2k+2)=3k'$

Avec : $k'=(3k+1)(3k^2+2k+2)\in\mathbb{N}$

Donc : $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.

3ére cas : si $n=3k+2$

$n(n^2+5)=(3k+2)((3k+2)^2+5)$

C'est-à-dire : $n(n^2+5)=(3k+2)(9k^2+12k+9)$

Donc : $n(n^2+5)=3(3k+2)(3k^2+4k+3)=3k'$

avec : $k'=(3k+2)(3k^2+4k+3)\in\mathbb{N}$

Donc : $n(n^2+5)$ est un multiple de 3

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le produit $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice25 : (***) Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $n^3 - n$ est divisible par 3.

Indication : Etudier les cas :

$n = 3k$; $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

2) Déduire que l'équation $n^3 - 4n - 100 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Corrigé : 1) soit $n \in \mathbb{N}$:

$n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = n(n-1)(n+1)$

Il y'a trois façons d'écrire n : $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec : $k \in \mathbb{N}$

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas :

1ére cas : si $n = 3k$:

$n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1) = 3\left(k(3k-1)(3k+1)\right) = 3k'$

avec : $k' = k(3k-1)(3k+1) \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas

2ére cas : si $n = 3k+1$:

$n^3 - n = (3k+1)(3k+1-1)(3k+1+1)$

$= (3k+1)(3k)(3k+2) = 3\left(k(3k+1)(3k+2)\right) = 3k'$

Avec : $k' = k(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi

3ére cas : si $n = 3k+2$

$n^3 - n = (3k+2)(3k+2-1)(3k+2+1)$

$= (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3\left((k+1)(3k+1)(3k+2)\right) = 3k'$

Avec : $k' = (k+1)(3k+1)(3k+2) \in \mathbb{N}$

Donc : Le nombre : $n^3 - n$ est un multiple de 3 dans ce cas aussi.

Par conséquent : selon le raisonnement par disjonction des cas le nombre $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Supposons que l'équation : $n^3 - 4n - 100 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{N}$.

On a : $n^3 - n$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : $n^3 - n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$n^3 - 4n - 100 = 0$ Équivaut à : $n^3 - n - 3n - 100 = 0$

Équivaut à : $3k - 3n - 100 = 0$

Équivaut à : $3(k-n) = 100$ avec $k-n$ un entier car $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$

Équivaut à : 3 divise 100 donc contradiction.

Par conséquent : l'équation $n^3 - 4n - 1 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Exercice26 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse .

0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ; 1004001 et 259

Corrigé : 1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0

17 est premier car admet exactement deux diviseurs

21 n'est pas premier car 3 divise 21 $(21 = 7 \times 3)$

41 est premier car admet exactement deux diviseurs

87 n'est pas premier car 3 divise 87 $(87 = 29 \times 3)$

105 n'est pas premier car 5 divise 105 $(105 = 5 \times 21)$

Question : Est-ce que 239 est premier ?

On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »

Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239 et par conséquent : 239 est premier

2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787

3) Est ce que 191 est premier ? On utilise la règle:

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 191$ Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191.

Par conséquent : 191 est premier

1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 qui est un multiple de 3 donc 3 divise 1004001

259 n'est pas premier car $259 = 7 \times 37$

C'est à dire 7 divise 259.

Exercice27 : (**) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \succ 2$

Montrer que si n est premiers alors $n+1$ N'est pas premiers .

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \succ 2$.

On a n est premiers alors n est impair

Donc $n+1$ est pair.

Par suite : $n+1$ n'est pas premiers

Exercice28: (**) On pose : $a = 540000$

1) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier a

2) Déterminer le plus petit entier naturel non nul qu'il faut multiplier par a pour trouver un carré parfait

Rappel : On dit qu'un entier naturel *n* est un carré parfait, s'il existe *m* dans $\mathbb{N}$ tel que : $n = m^2$.

Corrigé : 1) $540000 = 2^5 \times 3^3 \times 5^4$

540000 |2
270000 |2
135000 |2
67500 |2
33750 |2
16875 |3
5625 |3
1875 |3
625 |5
125 |5
25 |5
5 |5
1 |

La décomposition est terminée :
540000 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3 x 5 x 5 x 5 x 5
$540000 = 2^5 \times 3^3 \times 5^4$

2) Pour que a soit un carré d'un entier il faut que tous les exposants des nombres premiers dans sa décomposition soit pair.

$2^5 \times 3^3 \times 5^4 \times 2 \times 3 = 2^6 \times 3^4 \times 5^4$

$= \left(2^3 \times 3^2 \times 5^2\right)^2 = (1800)^2$

Donc : on doit multiplier a par : $2 \times 3 = 6$

Exercice29 : (**) Soit a un entier naturel :

1) Montrez que $a(a+2)+1$ s'écrit sous la forme x^2 où x est un nombre entier
(Dans ce cas on l'appelle "carré parfait»).

2) Soit n un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$:
Montrez que le nombre :
$\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1$ est un carré parfait.

3)a) Développez : $\left(n^2+3n+1\right)^2$

b) Déduire que le nombre
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré parfait.

Corrigé : 1) $a(a+2)+1 = a^2+2a+1 = (a+1)^2$

Par suite : $a(a+2)+1$ est un carré parfait

2) On a : $\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1$

$= \left(n^3+3n^2+n\right)\left(\left(n^3+3n^2+n\right)+2\right)+1 = a(a+2)+1$

Avec : $a = n^3+3n^2+n$

Donc d'après 1) on a :

$\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1 = \left(n^3+3n^2+n+1\right)^2$

Donc : le nombre : $\left(n^3+3n^2+n\right)\left(n^3+3n^2+n+2\right)+1$ est un carré parfait.

3)a) Développement de : $\left(n^2+3n+1\right)^2$.

$\left(n^2+3n+1\right)^2 = \left(\left(n^2+3n\right)+1\right)^2 = \left(n^2+3n\right)^2 + 2\left(n^2+3n\right)+1^2$

$= n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

3) b) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \left(n^2+n\right)\left(n^2+2n+3n+6\right)+1$

$= \left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)+1 = n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1$

Donc :

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

Par suite : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = \left(n^2+3n+1\right)^2$

Par conséquent : le nombre : $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est un carré parfait.

Exercice30: (***) Soit n un entier naturel :

1) Factoriser le nombre : n^3+1

2) Déduire que le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier.

Corrigé : 1) On a : $n^3+m^3 = (n+m)\left(n^2-n\times m+m^2\right)$

Donc : $n^3+1 = n^3+1^3 = (n+1)\left(n^2-n+1\right)$

2) $27000000001 = 27\times10^9+1 = 3^3\times10^9+1 = 3^3\times10^9+1$

$= \left(3\times10^3\right)^3+1 = \left(3\times10^3+1\right)\left(\left(3\times10^3\right)^2-3\times10^3+1\right)$

Donc : $27000000001 = 3001\left(3000^2-3000+1\right) = 3001\times8997001$

Donc : le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier car il admet plus que de deux diviseurs qui sont : 3001 et 8997001

Exercice31 : (***) Soit n un entier naturel :

1) Ecrire le nombre : n^4+4 sous la forme de différence de deux carrés parfaits

2) Déduire que le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel

Corrigé : 1) On a : $n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2$

$= \left(n^2+2\right)^2-4n^2 = \left(n^2+2\right)^2-(2n)^2$

2) On a:

$n^4+4 = \left(n^2+2\right)^2-(2n)^2 = \left(n^2+2-2n\right)\left(n^2+2+2n\right)$

Donc : le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel car il admet au moins deux diviseurs qui sont : n^2+2n+2 et n^2-2n+2 pour tout n entier naturel

Exercice32: (***) Soit n un entier naturel :

Montrer que si le nombre : $n+1$ est un carré parfait alors le nombre : $14n+50$ est la somme de quatre carrés parfaits.

Corrigé : 1) Soit n un entier naturel tel que : $n+1$ est un carré parfait donc : $n+1 = a^2$ avec $a \in \mathbb{N}$

On a: $14n+50 = 14n+14+36 = 14(n+1)+36$

Donc : $14n+50 = 14a^2+36 = 9a^2+4a^2+a^2+36$

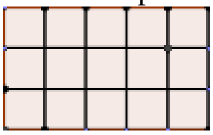
Donc : $14n+50 = (3a)^2+(2a)^2+a^2+6^2$

Donc : $14n+50$ est la somme de quatre carrés parfaits

Exercice33 : (**) Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75m. On veut carreler

cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.
Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.



2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine?
3) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.
a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.
b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.
c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

Corrigé : 1) Puisque $454 = 33\times13+25$
Et $375 = 33\times11+12$, il faut un peu plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de 11 carreaux en largeur. Donc : un nombre de carreaux non coupés égal à : $11\times13 = 143$
2)a) Les diviseurs de 455 sont :1 , 5 , 7, 13 , 35 , 65 , 91 et 455.
Les diviseurs de 385 sont : 1 , 5 , 7 , 11 , 55 ,77 et 385
b) L'ensemble des diviseurs communs à 455 et 385 sont donc : 1 , 5 et 7.
c) On peut donc utiliser des dalles de côté 7 cm pour carreler la cuisine.
Il en faudra 65 en longueur et 55 en largeur.
3) a) La liste des multiples de 24 inférieurs à 400 est : 24,48,72,96,120,144,168,192,216,240,264,288,312 336,360 et 384.
La liste des multiples de 15 inférieurs à 400 est: 15,30,45,60,75,90,105,120,135,150,165,180,195,210, 225,240,255,270,285,300,315,330,345,360 et 375
b) La liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400 est donc 120,240 et 360.
c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de 360 cm (soit 3m 60) de côté avec des carreaux de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Exercice34 : (*)1) Décomposer les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers.
2) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{84}{60}$
3) Simplifier les racines carrées suivant : $A = \sqrt{2100}$ et $B = \sqrt{63}\times\sqrt{105}$

Corrigé : 1) Décomposons les deux nombres 84 et 60 en produit de facteurs premiers on trouve:
$84=2^2\times3\times7$ et $60=2^2\times3\times5$
2) En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers on trouve:
$\frac{84}{60} = \frac{2\times2\times3\times7}{2\times2\times3\times5} = \frac{7}{5}$ ⟵ La forme irréductible Fra

3) $\sqrt{2100} = \sqrt{2\times2\times3\times5\times5\times7}$
$= \sqrt{2^2\times3\times5^2\times7}$
$= \sqrt{\left(2^2\times5^2\right)\times3\times7}$
$= \sqrt{(2\times5)^2}\times\sqrt{3\times7} = 2\times5\times\sqrt{21} = 10\sqrt{21}$

On décompose chacun des nombres 63 et 105
On trouve:
$63 = 3\times21 = 3\times3\times7 = 3^2\times7$ et $105 = 3\times35 = 3\times5\times7$
D'où $B = \sqrt{63\times105} = \sqrt{3^2\times7\times3\times5\times7}$
$= 3\times7\sqrt{3\times5} = 21\sqrt{15}$.

Exercice35: (*) à l'aide de décomposition en facteurs premiers simplifier la fraction
Suivante: $\frac{612}{1530}$ Et écrire : $\sqrt{612\times1530}$ sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Corrigé : $612 = 2^2\times3^2\times17$ et $1530 = 2^1\times3^2\times5^1\times17$
$PGCD(1530;612) = 2^1\times3^2\times17 = 153$

Méthode 1 : $\frac{612}{1530} = \frac{2^1\times3^2\times5\times17}{2^2\times3^2\times17} = \frac{5}{2}$

Méthode 2 : $\frac{612}{1530} = \frac{612\div153}{1530\div153} = \frac{5}{2}$

$\sqrt{612\times1530} = \sqrt{2^1\times3^2\times5\times2^2\times3^2\times17^2}$
$\sqrt{612\times1530} = \sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$
$\sqrt{ab} = \sqrt{2}\times3\times\sqrt{5}\times2\times3\times17 = 306\times\sqrt{10}$

Exercice36 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $F = \frac{n+9}{n-6}$
1) Montrer que : $F = 1+\frac{15}{n-6}$ pour $n\neq6$
2) En déduire les valeurs de n tel que : F soit un entier naturel

Corrigé : 1) Pour $n \neq 6$ on a :

$1+\frac{15}{n-6}=\frac{n-6+15}{n-6}=\frac{n+9}{n-6}$ Donc: $1+\frac{15}{n-6}=F$

2) $F \in \mathbb{N}$ Équivaut à : $1+\frac{15}{n-6} \in \mathbb{N}$

Équivaut à : $\frac{15}{n-6} \in \mathbb{N}$

Équivaut à : $n-6$ divise 15

Équivaut à: $n-6=1$ ou $n-6=3$ ou $n-6=5$ ou $n-6=15$

Équivaut à : $n=7$ ou $n=9$ ou $n=11$ ou $n=21$

Donc : F est un entier naturel si et seulement si : $n=7$ ou $n=9$ ou $n=11$ ou $n=21$

Exercice37 : (***) Soient *m* et *n* deux nombres entiers naturels, tel que : $m \geq n$

1) Monter que *m* + *n* et *m* - *n* ont la même parité.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $m^2-n^2=28$

Corrigé : 1) On a : $(m+n)+(m-n)=2m$

C'est-à-dire la somme est paire

Donc : automatiquement *m* + *n* et *m* - *n* ont la même parité (car si non la somme sera impaire)

2) $m^2-n^2=28$ Équivaut à : $(m-n)(m+n)=28\ (1)$

Mais les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28

Et puisque : $m-n \leq m+n$ et *m* + *n* et *m* - *n* ont la même parité Alors on a : $\begin{cases} m-n=2 & (1) \\ m+n=14 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2)$ Donne : $2m=16$ par suite : $\begin{cases} m=8 \\ n=6 \end{cases}$

$(6;8)$ est la solution et donc : $S=\{(6;8)\}$.

Exercice38 : (***) Quels sont les entiers naturels non nuls x et y qui vérifient la relation :

$x^2=y^2+2021$.

Corrigé : $x^2=y^2+2021$ Équivaut à : $x^2-y^2=2021$

Équivaut à : $(x-y)(x+y)=2021$.

Équivaut à : $(x-y)(x+y)=43\times 47=1\times 2021$

Et on a : $x-y \leq x+y$

Donc on a : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2021 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=43 \\ x+y=47 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x=1011 \\ y=1010 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=45 \\ y=2 \end{cases}$.

Exercice39 : (***)

1) Déterminer tous les diviseurs de 22

2) En déduire tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $(x+2)(y+1)=22\ (1)$

3) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x+xy+y=30\ (2)$

4) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $xy=3x+2y\ (3)$

Corrigé : 1) On a : $22=2^1\times 11^1$ donc les diviseurs de 22 sont : 1 et 2 et 11 et 22

2) On a : $(x+2)(y+1)=22\ (1)$

Donc : $\begin{cases} x+2=22 \\ y+1=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+2=11 \\ y+1=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+2=2 \\ y+1=11 \end{cases}$

ou ($\begin{cases} x+2=1 \\ y+1=22 \end{cases}$ impossible car $x \in \mathbb{N}$)

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont :

$(20;0)$; $(9;1)$ et $(0;10)$

3) $x+xy+y=30$ équivaut à **:** $x+xy+y+1=31$

Équivaut à : $x(1+y)+(y+1)=31$

Équivaut à : $(y+1)(x+1)=31$

Donc : $(x+1)$ et $(y+1)$ sont deux diviseurs de 31

Par suite : $\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=31 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+1=31 \\ y+1=1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=0 \\ y=30 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=30 \\ y=0 \end{cases}$

Par conséquent les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (2)

Sont : $(0;30)$ et $(30;0)$.

4) Déterminons tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$xy=3x+2y\ (3)$

$xy=3x+2y$ Équivaut à $xy-3x=2y$

Équivaut à : $x(y-3)=2y-6+6$

C'est-à-dire : $x(y-3)=2(y-3)+6$

Équivaut à : $x(y-3)-2(y-3)=6$

Équivaut à : $(y-3)(x-2)=2\times3=6\times1$

Donc : $(x-2)$ et $(y-3)$ sont deux diviseurs de 6.

Par suite : $\begin{cases}x-2=2\\y-3=3\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=6\\y-3=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=3\\y-3=2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-2=1\\y-3=6\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=8\\y=4\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=3\\y=8\end{cases}$

Par conséquent les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (2)

Sont : $(2;6)$ et $(8;4)$ et $(5;5)$ et $(3;8)$.

Exercice40 : (*) 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres :
50 ; 360 ; 60 ; 24 ; 56 ; 14 ; 42
2) *En déduire*: *PGCD (50 ; 360) ; PGCD (60 ; 50) PGCD (56 ; 14) ; PGCD (56 ; 42) ; PGCD (24 ; 60)*

Corrigé : 1) $50=2\times5^2$; $360=2^3\times3^2\times5$
$60 = 2\times30 = 2\times2\times15 = 2\times2\times3\times5 = 2^2\times3\times5$
$24 = 2\times12 = 2\times2\times6 = 2\times2\times2\times3 = 2^3\times3$
$56 = 2\times28 = 2\times2\times14 = 2\times2\times2\times7 = 2^3\times7$ et
$14 = 2\times7$ et $42 = 2\times3\times7$
2) On applique la règle suivante pour calculer le PGCD :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (50 ; 360) = 2× 5= 10
PGCD (60 ; 50) = 2× 5= 10
PGCD (56 ; 14) = 2× 7= 14
PGCD (56 ; 42) = 2× 7= 14
PGCD (24 ; 60) = $2^2\times3$ = 12.

Exercice41 : (*) On utilisant l'Algorithme d'Euclide (les divisions euclidiennes successives)
Déterminer le PGCD de : 1) 3723 et 6711
2) 1085 et 837

Corrigé : 1) On effectue les divisions euclidiennes successives :
6711 =3723 ×1 + 2988 puis 3723= 2988×1+735
puis 2988 =735× 4 + 48 puis 735 =48× 15 +15
Puis 42= 15 ×2 + 12 puis 15= 12 ×1 + **3**
Puis 12= 3 ×4+ **0**
Le dernier reste non nul étant 3 par suite le PGCD de 6711 et 3723 est 3
2) De la même manière pour 837 et 1085 :
On effectue les divisions euclidiennes successives :
1085 =837 ×1 + 248 puis 837= 248× 3 +93
Puis 248=93× 2 + 62 puis 93=62× 1 +31
Puis 62= 31×2 + 0 Le dernier reste non nul étant 31 par suite le PGCD de 1085 et 837 est 31
Ou en écrit : $1085\wedge837=31$

Exercice42: (*)1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres :
170 ; 68 ; 60 ; 220 ; 340
2) Calculer : *PPCM (68 ; 170); PPCM (220 ; 340)*

Corrigé : 1) $170 = 2\times5\times17$
$68 = 2\times2\times17 = 2^2\times17$
$220 = 2\times2\times5\times11 = 2^2\times5\times11$
$340 = 2\times2\times5\times17 = 2^2\times5\times17$
2) On applique la règle suivante pour calculer le PPCM :« Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PPCM (68 ; 170) $=2^2\times5\times17=340$
PPCM (220 ; 340) = $2^2\times5\times11\times17=3740$

Exercice43 : (*) On considère les nombres :
72 et 154
1) Calculer : d=PGCD (72 ; 154)
Et m=PPCM (72 ; 154)
2) Vérifier que :
PPCM (72 ; 154) × PGCD (72 ; 154) =72 × 154
et que : $PGCD(\frac{72}{d};\frac{154}{d})=1$

Corrigé : 1)On divise le nombre à décomposer autant de fois que possible par 2, puis par 3, par 5, par 7, par 11… en suivant la liste des nombres premiers successifs.
$72 = 8\times9 = 2\times2\times2\times3\times3 = 2^3\times3^2$
$154 = 2\times77 = 2\times7\times11$
Donc : d=PGCD (72 ; 154)=2
et m=PPCM (72 ; 154)= $2^3\times3^2\times7\times11=5544$
2) PPCM (72 ; 154) × PGCD (72 ; 154)
=5544×2=11088
Et puisque : 72 × 154=11088 alors :
PPCM (72 ; 154) × PGCD (72 ; 154) =72 × 154
$PGCD(\frac{72}{d};\frac{154}{d})=PGCD(\frac{72}{2};\frac{154}{2})=PGCD(36;77)$
Et on a : $36 = 2^2\times3^2$ et $77 = 7\times11$
Donc : $PGCD(\frac{72}{d};\frac{154}{d})=1$

Exercice44: (*) On pose : $a=33075$ et $b=7875$
1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : a et b et en déduire :
$7875\wedge33075$; $7875\vee33075$
2) En déduire une simplification des nombres :

$\frac{a}{b}$ et $\sqrt{a}$

Corrigé : 1)

7875	**3**
2625	**3**
875	**5**
175	**5**
35	**5**
7	**7**
1	

Technique (1)

33075	**3**
11025	**3**
3675	**3**
1225	**5**
245	**5**
49	**7**
7	**7**
1	

Technique (1)

On a donc : $33075=3^3\times5^2\times7^2$ *t $7875=3^2\times5^3\times7$

Par suite par application des règles de calculs de $PGCD$ et $PPCM$

On trouve :

$$7875\wedge33075=PGCD(7875;33075)=3^2\times5^2\times7=1575$$

$$7875\vee33075=PPCM(7875;33075)=3^3\times5^3\times7^2=165375$$

2) $\frac{a}{b}=\frac{3^3\times5^2\times7^2}{3^2\times5^3\times7}=\frac{3\times7}{5}=\frac{21}{5}$

Et $\sqrt{a}=\sqrt{3^3\times5^2\times7^2}=3\times5\times7\times\sqrt{3}=105\sqrt{3}$

Car : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{a^2}=a$ si $a\geq0$

Exercice45 : (**) D'un aéroport un avion part tous les 9 jours vers un autre pays et du même aéroport un autre avion part tous les 15 jours vers un autre pays

Si les deux avions partent les mêmes jours pour la 1ere fois après combien de jours ils partiront dans les mêmes jours pour la deuxième fois ?

Corrigé : Les départs du premier avion à partir du premier jour sont des multiples de 9 qui sont:

9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ;…

Les départs du deuxième avion à partir du premier jour sont des multiples de 15 :

Qui sont ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ;…

Le PPCM (9 ; 15) est le nombre de jours après les quels les deux avions partent dans les mêmes jours pour la deuxième fois et puisque :

PPCM (9 ; 15)=45 donc le nombre de jours est 45.

Autre méthode de calcul du PPCM (9 ; 15) :

On décompose chacun des nombres 9 et 15.

On trouve : 9 = 3 ² et 15 = 3 × 5 et on applique la règle pour calculer le PPCM

Donc : PPCM (9 ; 15) = 3 ² × 5 =9 × 5=45

Exercice46 : (***) Une société veut fixer des bars pour l'éclairage public sur le périmètre d'une surface rectangulaire de longueur $320m$ et de largeur $240m$ tel que une bar dans chaque coin du rectangle et la distance entre deux bars successives est constante et un nombre entier

1) Quelle est la plus grande distance qui peut séparer deux bars Successives

2) Quelle est donc le nombre de bars qu'il faut fixer

3) Quelle est les distances supérieures à : 15 m possible entre deux bars Successives ?

Calculer dans chaque cas possible le nombre de bars qu'il faut fixer

Corrigé : 1) On calcul $PGCD(240;320)$:

$320=2^6\times5$ Et $240=2^4\times3\times5$

Donc : $240\wedge320=PGCD(240;320)=80$

Donc la plus grande distance qui peut séparer deux bars Successives est 80

2) Le périmètre est : $(240+320)\times2=1120m$.

Donc : le nombre de bars qu'il faut fixer dans ce cas est : $1120m\div80=14m$

3) Les diviseurs communs de : 240 et 320 sont :1 ;2 ;4 ;5 ;7 ;8 ;10 ;16 ;20 ;30 ;40

Les distances supérieurs à : 15 m possible entre deux bars Successives sont : 16 ; 20 ; 30 ; 40 ; 80

Pour $16m$ le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div16=70m$

Pour $20m$ le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div20=56m$

Pour $40m$ le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div40=28m$

Pour $80m$ le nombre de bars qu'il faut fixer est $1120m\div80=14m$.

Exercice47 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$a=10^{2n+3}-10^{2n+1}\ ;\ b=3\times10^{n+1}+4\times10^{n}$$

1) Montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b

3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Corrigé : 1) $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}=10^{2n}\times10^3-10^{2n}\times10^1$

$a=10^{2n}\times\left(10^3-10\right)$

$a=10^{2n}\times(990)=10^{2n}\times99\times10=3\times33\times10^{2n}\times10k$

$a=3^2\times11\times10^{2n}\times10=3^2\times11\times10^{2n+1}=11\times k$

Avec $k=3^2\times10^{2n+1}$

Donc a est un multiple de 11

On a :

$b=3\times10^{n+1}+4\times10^n=3\times10^n\times10^1+4\times10^n$

$b=3\times10^n\times10^1+4\times10^n=10^n(30+4)=10^n\times34$

$b=17\times2\times10^n=17\times k$ Avec : $k=2\times10^n$

Par suite : b un multiple de 17

2) Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b :

On a trouvé que: $a=3^2\times11\times10^{2n+1}$

C'est-à-dire : $a=3^2\times11\times(2\times5)^{2n+1}$

C'est-à-dire : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et c'est la décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=17\times2\times10^n$ donc :

$b=17\times2\times10^n=17\times2\times(2\times5)^n=17\times2\times2^n\times5^n$

Par suite : $b=2^{n+1}\times5^n\times17$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

3) En déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$

On a : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et $b=2^{n+1}\times5^n\times17$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\wedge b=2^{2n+1}\times5^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc :

$a\vee b=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times17\times11=2^{2n+1}\times5^{2n+1}\times693$

Exercice48 : (**) On considère deux entiers naturels a et b avec $a\prec b$ tels que :

$a\times b=4320$ et $a\wedge b=12$

1) Calculer $a\vee b$ 2) Calculer a et b

Corrigé : 1) On sait que $(a\wedge b)\times(a\vee b)=a\times b$ et

On a : $a\wedge b=12$ Donc : $12\times(a\vee b)=4320$

C'est-à-dire : $a\vee b=\dfrac{4320}{12}=360$

2) Calculons a et b : Décomposons en produit de facteurs premiers les nombres 12 et 360

$12=2^2\times3$

$360=6\times6\times10=2\times3\times2\times3\times2\times5=2^3\times3^2\times5$

Nous avons donc :

$a\wedge b=2^2\times3$ et $a\vee b=2^3\times3^2\times5$ et $a\prec b$

Par conséquent : $a=2^2\times3^2=36$ et $b=2^3\times3\times5=120$

Exercice49 : (***) Trouver deux entiers naturels a et b avec $a\prec b$ tels que :

$a\times b=7776$ et $a\wedge b=18$

Corrigé : $a\wedge b=18$ Signifie $a=18n$ et $b=18m$ avec $n\wedge m=1$ (n et m premiers entre eux)

$a\times b=7776$ Signifie $18n\times18m=7776$

C'est-à-dire $324n\times m=7776$

Signifie $n\times m=24$

Or $24=1\times24$ ou $24=2\times12$ ou $24=3\times8$ ou $24=4\times6$

Mais en retient seulement $24=1\times24$ ou $24=3\times8$ car n et m premiers entre eux.

D'où : ($n=1$ et $m=24$) ou ($n=3$ et $m=8$)

Donc : ($a=18$ et $b=432$) ou ($a=54$ et $b=144$)

Exercice50: (***) 1) Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x^2-y^2=51$ (1)

2) Déterminer tous les couples $(a;b)$ de nombres entiers naturels qui vérifient :

Le système suivant : $\begin{cases}a^2-b^2=7344\\ a\wedge b=12\end{cases}$ (S)

Corrigé : 1) $x^2-y^2=51$

Équivaut a $(x+y)(x-y)=51$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51

On a : $51=3^1\times17^1$ donc les diviseurs de 51 sont : 1 et 3 et 17et 51

Par suite : $\begin{cases}x-y=1\\ x+y=51\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=3\\ x+y=17\end{cases}$

Car $x-y\prec x+y$ Donc : $\begin{cases}x=26\\ y=25\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=10\\ y=7\end{cases}$

Par suite: les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont :

$(26;25)$; $(10;7)$

2) $\begin{cases}a^2-b^2=7344\\ a\wedge b=12\end{cases}$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$

On a : $a \wedge b = 12$ donc : $a = 12x$ et $b = 12y$

Avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ et $x \wedge y = 1$

On a aussi : $a^2 - b^2 = 7344$

Équivaut à : $(12x)^2 - (12y)^2 = 7344$

Équivaut à : $144x^2 - 144y^2 = 7344$

C'est-à-dire : $144(x^2 - y^2) = 7344$

Équivaut à : $x^2 - y^2 = \dfrac{7344}{144} = 51$

Et d'après **1)** on a donc :

$(\ x = 26 \ et \ y = 25)$ ou $(\ x = 10 \ et \ y = 7)$

Par suite :($a = 312$ et $b = 300$**)**

Ou **(** $a = 120$ et $b = 84$**)**

Par conséquent **:** les couples $(x; y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient le système (S)

Sont : $(312;300)$ et $(120;84)$

Exercice51 : (***) 1) Deux nombres a et b sont premiers entre eux et leur somme est 24.
Déterminer tous les couples (a, b) possibles.
2) Déterminer tous les couples (x ; y) d'entiers naturels tels : x + y = 96 et PGCD (x ; y) = 4

Corrigé : 1) Parmi les couples d'entiers n'ayant pas de diviseur commun (autre que 1) et dont la somme vaut 24, il y a : a =1 ; b= 23 ou a = 5 ; b =19
ou a =7 ; b =17 ou a =11 ; b =13
2) Si PGCD (*x* ; *y*) = 4 alors 4 divise *x* et *y*,
donc : *x* = 4*n* et *y* = 4*m* où *m* et *n* sont des entiers premiers entre eux (sinon 4 ne serait pas le pgcd de *x* et *y*) et puisque *x* + *y* = 96
On en déduit donc : 4 (*n*+*m*)=96
Qui signifie que : *n*+*m*=24
Il nous faut donc déterminer les couples d'entiers (*n* ; *m*) premiers entre eux tels que *n*+*m*=24
Ceci ayant été fait dans la question 1)
On conclut que : n = 1; m = 23 ou n = 19; m = 5
ou n = 7; m = 17 ou n = 11; m = 13
Donc en multipliant par 4 : x = 4 ; y = 92
ou x = 20 ; y = 76 ou x = 28 ; y = 68
ou x = 44 ; y = 52 Donc : les couples sont :
$(4;92)$ **;** $(20;76)$**;** $(28;68)$ Et $(44;32)$

Exercice52 : (***) Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.
1) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2) Préciser le nombre de déplacement par laps de temps.

Corrigé : 1) Les voitures se croiseront pour la première fois (depuis le départ) au bout d'un temps égal à PPCM(30,36)
Pour calculer PPCM(30,36), deux solutions sont envisageables :
- Soit on calcule (PGCD 30 ; 36), qui vaut 6 et puisque PPCM(30,36) × (PGCD 30 ; 36) =30×36
On en déduira PPCM(30,36)=180
- Soit on utilise la décomposition de 30 et 36 en produits de facteurs premiers
$30=2\times3\times5$ et $36=2^2\times3^2$, et on calcule, grâce aux maximum des puissances, PPCM(30,36)=180
Les deux voitures se croiseront donc au bout de 180 minutes, soit 5 tours pour la voiture A et 6 tours pour la voiture B.
2) Toutes les 180 minutes (3 heures), la voiture A parcourt 5 tours, et la voiture B 6 tours.

Pierre de Fermat
Connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.