Correction serie1 : LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Exercice1 : Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes

1) P "$\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ 2) Q "$\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$ 3) R "$\left(2\geq 1 \quad et \quad -1\leq 1\right)$"

4) M "$\left(\sqrt{3}\geq 1 \; ou \; \frac{1}{4}\in\mathbb{N}\right)$" 5) N "$\left(2\geq 1 \quad et \quad (-2)^2=-4\right)$"

Solution : 1) La proposition P est vraie $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

La négation de la proposition P "$\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ est la proposition $\overline{P}$ "$\sqrt{3}\prec 1$"

2) Q est fausse car : $\frac{1}{2}=0,5\notin\mathbb{N}$

La négation de la proposition Q "$\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$ est la proposition $\overline{Q}$ "$\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$"

3) R "$\left(2\geq 1 \quad et \quad -1\leq 1\right)$" La proposition R: est vraie

Car "$2\geq 1$ " est vraie et aussi "$-1\leq 1$" est vraie

La négation de la proposition R "$\left(2\geq 1\, et \; -1\leq 1\right)$" est la proposition $\overline{R}$ "$\left(2\prec 1 \quad ou \quad -1\succ 1\right)$"

4) M "$\left(\sqrt{3}\geq 1 \; ou \; \frac{1}{4}\in\mathbb{N}\right)$" La proposition M: est vraie

Car "$\sqrt{3}\geq 1$" est vraie et on a "$\frac{1}{4}\in\mathbb{N}$" est fausse

La négation de la proposition M "$\left(\sqrt{3}\geq 1 \; ou \; \frac{1}{4}\in\mathbb{N}\right)$" est la proposition $\overline{M}$ "$\left(\sqrt{3}\prec 1 \; et \; \frac{1}{4}\notin\mathbb{N}\right)$"

5) N "$\left(2\geq 1 \quad et \quad (-2)^2=-4\right)$" La proposition R: est fausse

Car "$2\geq 1$ " est vraie et "$(-2)^2=-4$" est fausse

La négation de la proposition N "$\left(2\geq 1 \quad et \quad (-2)^2=-4\right)$" est la proposition

$\overline{N}$ "$\left(2\prec 1 \quad ou \quad (-2)^2\neq -4\right)$"

Exercice2 : Donner la valeur de vérité des propositions suivantes

1) P "$6 \; est \; divisible \; par \; 3 \quad et \; -1\notin\mathbb{N}$" 2) Q "$\frac{1}{2}\in\mathbb{N} \; ou \; (-1)^4=-1$" 3) R "$1+2=4$"$\Rightarrow$"$\sqrt{2}=-1$"

4) K "$0\leq 1$"$\Rightarrow$"$\sqrt{2}=1$" 5) L "$0\leq -1$"$\Leftrightarrow$"$\sqrt{2}=1$" 6) W "$2=2$"$\Leftrightarrow$"$0\in\mathbb{N}^*$"

Solution :1) P "6 *est divisible par* 3 *et* $-1 \notin \mathbb{N}$" La proposition P est vraie
Car "6 *est divisible par* 3 "est vraie et on a "$-1 \notin \mathbb{N}$" est vraie

2) Q "$\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ *ou* $(-1)^4 = -1$" La proposition Q est fausse

Car "$\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$"est fausse et on a "$(-1)^4 = -1$" est fausse

3) 2)"$1+2=4$"$\Rightarrow$"$\sqrt{2}=-1$" est vraie Car "$1+2=4$"est fausse et on a "$\sqrt{2}=-1$" est fausse

En effet : si P est fausse alors La proposition « P ⇒ Q » est toujours vraie.

4) K "$0 \leq 1$"$\Rightarrow$"$\sqrt{2}=1$" est fausse Car "$0 \leq 1$"est vraie et on a "$\sqrt{2}=1$" est fausse

5)"$0 \leq -1$"$\Leftrightarrow$"$\sqrt{2}=1$" est vraie car : "$0 \leq -1$"*est fausse* et "$\sqrt{2}=1$"*est fausse*

6) W "$2=2$"$\Leftrightarrow$"$0 \in \mathbb{N}^*$" est fausse Car "$2=2$"est vraie et on a "$0 \in \mathbb{N}^*$" est fausse

Exercice3 : Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes
1) P "$(2 \geq 1 \;\; et \;\; -1 \in \mathbb{N})$" 2) Q "$(\sqrt{3} \geq 2 \;\; ou \;\; \sqrt{2} \notin \mathbb{N})$"
3) R "$\forall x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0$" 4) M "$\exists x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 3$"
5) N "$\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$"

Solution :1) La proposition : P "$(2 \geq 1 \;\; et \;\; -1 \in \mathbb{N})$" est fausse
Car "$2 \geq 1$ " est vraie et "$-1 \in \mathbb{N}$" est fausse
La négation de « P "$(2 \geq 1 \, et \, -1 \in \mathbb{N})$") » est $\overline{P}$ "$(2 \prec 1 ou \, -1 \notin \mathbb{N})$"
2)La proposition : Q "$(\sqrt{3} \geq 2 \;\; ou \;\; \sqrt{2} \notin \mathbb{N})$" est vraie
Car "$\sqrt{3} \geq 2$ "est fausse et "$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$" est vraie
La négation de «Q "$(\sqrt{3} \geq 2 \;\; ou \;\; \sqrt{2} \notin \mathbb{N})$") » est $\overline{Q}$"$\sqrt{3} \prec 2 \;\; et \;\; \sqrt{2} \in \mathbb{N}$"
3)La proposition : R "$\forall x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0$" est fausse
Car pour x=-1 : elle est fausse
La négation de « R "$\forall x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0$") » est $\overline{R}$ "$\exists x \in \mathbb{R} / 2x \prec 0$"
4)La proposition : M "$\exists x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 3$" est vraie
Car pour x=2 : elle est vraie
La négation de « M "$\exists x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 3$"» est $\overline{M}$ "$\forall x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 3$"
5)La proposition : N "$\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$" est fausse

Car pour n=1 : elle est fausse

La négation de « N "$\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$"» est $\overline{N}$ "$\exists n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$"

Exercice4 : Donner la valeur de vérité des propositions suivantes
1) R "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \succ 0$" 2) B "$\forall n \in \mathbb{N} / 2^n \succ 5(n+1)$"
3) c "$\exists n \in \mathbb{N} / 2x - 5 = 0$"

Solution :1) La proposition : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \succ 0$ est fausse
Car pour x=0 on trouve $"0 \succ 0"$ qui est une proposition fausse
2) $B\ "\forall n \in \mathbb{N} / 2^n \succ 5(n+1)"$Est une proposition fausse. Car si n=1 on trouve : $2 \succ 10$ qui est faux
3) $"\exists n \in \mathbb{N} / 2x - 5 = 0"$ est fausse car : $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

La négation de «$\forall x \in E : P(x)$)» est «$\exists x \in E : \overline{P(x)}$».

La négation de «$\exists x \in E : P(x)$)» est «$\forall x \in E : \overline{P(x)}$».

Exercice5 : Donner la négation des propositions suivantes

1) $A\ "\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \succ 0"$ 2) $B\ "\forall n \in \mathbb{N} / 2^n \succ 5(n+1)"$
3) $C\ "\exists n \in \mathbb{N} / 2x - 5 = 0"$ 4) $D\ "\exists n \in \mathbb{N} / \sqrt{n} \in \mathbb{N}"$
5) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ 6) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = x$

Solution :1) La négation de : $A\ "\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \succ 0"$)est $\overline{A}\ "\exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0"$
2) La négation de : $B\ "\forall n \in \mathbb{N} / 2^n \succ 5(n+1)"$)est $\overline{B}\ "\exists n \in \mathbb{N} / 2^n \leq 5(n+1)"$
3) La négation de : $C\ "\exists n \in \mathbb{N} / 2x - 5 = 0"$)est $\overline{C}\ "\forall n \in \mathbb{N} / 2x - 5 \neq 0"$
4) La négation de : $D\ "\exists n \in \mathbb{N} / \sqrt{n} \in \mathbb{N}"$)est $\overline{D}\ "\exists n \in \mathbb{N} / \sqrt{n} \notin \mathbb{N}"$
5)La négation de «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est La proposition $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$
6)La négation de «$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = x$) » est «$\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} \neq x$ »

Exercice6 : $x \in \mathbb{R};$

Montrer que : $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 14 \leq 3x + 11 \leq 17$

Solution : $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3 \times 1 \leq 3x \leq 3 \times 2$

$$\Rightarrow 3 \leq 3x \leq 6$$
$$\Rightarrow 3 + 11 \leq 3x + 11 \leq 6 + 11$$
$$\Rightarrow 14 \leq 3x + 11 \leq 17$$

Exercice7 : $x \in \mathbb{R};$

Montrer que : $0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 3\sqrt{x} - 1 \leq 5$

Solution : $1 \leq x \leq 4 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{4} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow 3 \times 1 \leq 3 \times \sqrt{x} \leq 3 \times 2$

$$\Rightarrow 3 \leq 3\sqrt{x} \leq 6$$
$$\Rightarrow 3 - 1 \leq 3\sqrt{x} - 1 \leq 6 - 1$$
$$\Rightarrow 2 \leq 3\sqrt{x} - 1 \leq 5$$

Exercice8 : Montrer que La proposition $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 \prec x$

En posant : $x = \frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec \frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice9 : Montrer que La proposition $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : 2x \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x \prec x$

En posant : $x = -1$ on aura : $2 \times (-1) \prec -1$ c'est-à-dire : $-2 \prec -1$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice10: Montrer que : $\forall x>0 \quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$$

Et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0 \quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exercice11 : Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}):\frac{x^2-2}{x^2+2}\neq 1$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $(\exists x\in\mathbb{R}):\frac{x^2-2}{x^2+2}=1$

Comme $\frac{x^2-2}{x^2+2}=1$ alors $x^2-2=x^2+2$

Donc $\boxed{-2=+2}$

Cela conduit à une contradiction.

Conclusion : $(\forall x\in\mathbb{R}):\frac{x^2-2}{x^2+2}\neq 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien