PROF : ATMANI NAJIB
1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF
Cours : Calcul numérique Avec Exercices avec solutions
http://www.xriadiat.com/

Cours : LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Avec Exercices avec solutions

Quelques motivations

Les mathématiques est un langage pour s'exprimer rigoureusement, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

1. PROPOSITION :

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemples :

– « Je suis plus grand que toi. »

– « $2+2=4$ »

– « $2\times 3=5$ »

– « Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^2\geq 0$ »

2. OPERATIONS LOGIQUES :

Si P est une proposition et Q est une autre proposition, nous allons définir de nouvelles propositions construites à partir de P et de Q.

2-1) L'opérateur logique «et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

FIGURE 1 – Table de vérité de « P et Q »

Exemple1 : soient les propositions P "$\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$, Q "$\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$

La proposition P est vraie si Q est fausse

Donc La proposition "$PetQ$" est fausse

Exemple2 : La proposition : "$\left(2\geq 1 \quad et \quad -1\leq 1\right)$" est vraie

Car "$2\geq 1$ " est vraie et aussi "$-1\leq 1$" est vraie

2-2) L'opérateur logique « où »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux propositions P ou Q est vraie.

La proposition « P ou Q » est fausse si les deux proposition s P et Q sont fausses.

On reprend ceci dans la table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

FIGURE 2 – Table de vérité de « P ou Q »

Exemple1 : Soient les propositions $P"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$, $Q"\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$

La proposition P est vraie si Q est fausse

Donc La proposition $"P\ ou\ Q"$ est vraie

Exemple2 : La proposition : $"\left(2\leq 1\quad et\quad -1\geq 1\ \right)"$ est fausse

Car $"2\leq 1\ "$ est fausse et aussi $"-1\geq 1"$ est fausse

2-3) La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
On note $\overline{P}$ la négation de La proposition P

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

FIGURE 1.3 – Table de vérité de « non P »

- La négation de la proposition P $"1=2"$ est la proposition $\overline{P}$ $"1\neq 2"$

La proposition P $"1=2"$ est fausse donc $\overline{P}$ $"1\neq 2"$ vraie

- La négation de la proposition Q $"1\in\mathbb{N}"$ est la proposition $\overline{Q}$ $"1\notin\mathbb{N}"$

La proposition Q $"1\in\mathbb{N}"$ est vraie donc $\overline{Q}$ $"1\notin\mathbb{N}"$ fausse

2-4) L'implication ⇒

La proposition « (non P) ou Q » est notée « P ⇒ Q ». Sa table de vérité est donc la suivante :

p	q	$(p\Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

FIGURE 1.4 – Table de vérité de « P ⇒ Q »

La proposition « P ⇒ Q » se lit en français « P implique Q ». Elle se lit souvent aussi «si P est vraie alors Q est vraie » ou «si P alors Q ».

Par exemple :

1) $"0\leq 1"\Rightarrow"\sqrt{2}=1"$ est fausse

2) $"1+2=4"\Rightarrow"\sqrt{2}=-1"$ est vraie Eh oui, si P est fausse alors La proposition « P ⇒ Q » est toujours vraie.

3) $0\leq x\leq 100\Rightarrow\sqrt{x}\leq 10$ est vraie (prendre la racine carrée).

2-4) L'équivalence ⇔

La proposition « P ⇔ Q » se lit « P équivalent à Q ».

Il est vrai lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

p	q	$(p\Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

FIGURE 1.5 – Table de vérité de « P ⇔ Q »

Exemples :

1) $"0\leq -1"\Leftrightarrow"\sqrt{2}=1"$ est vraie car : $"0\leq -1"$*est fausse* et $"\sqrt{2}=1"$*est fausse*

2) $"2=2"\Leftrightarrow"0\in\mathbb{N}^{*}"$ est fausse car : $"2=2"$*est vraie* et $"0\in\mathbb{N}^{*}"$*est fausse*

3. Quantificateurs et fonction propositionnelle

3-1) Fonction propositionnelle

Si une proposition P dépend d'un paramètre x on l'appelle fonction propositionnelle

Par exemple « $2x\geq 6$ », La fonction propositionnelle P(x) est vraie ou fausse selon la valeur de x.

Si x=1 alors $P(1)$ $"2\geq 6"$ est fausse

Si x=4 alors $P(4)$ $"8\geq 6"$ est vraie

La proposition « $x\in\mathbb{R}:x^{2}\geq 0$ » est une proposition vraie pour tout x de $\mathbb{R}$

3.2 Le Quantificateurs ∀ : « pour tout » :

Lorsque les propositions P(x) sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E

En écrit : $\forall x \in E : P(x)$ On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) »

Exemples :

«$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$» est une proposition vraie.

«$\forall x \in \mathbb{R} : 2x \leq 4$» est une proposition fausse.

3.2 Le Quantificateurs ∃ : «il existe »

La proposition $\exists x \in E / P(x)$ est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie. On lit «il existe x appartenant à E tel que P(x) (soit vraie)».

Exemples :

1) «$\exists x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0$» est vraie (par exemple x = 1 (1 vérifie bien la propriété).

2)«$\exists n \in \mathbb{N} : 2n - 1 = 0$»est fausse

3) «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif)

3.3 La négation des Quantificateurs :

La négation de «$\forall x \in E : P(x)$)»est «$\exists x \in E : \overline{P(x)}$».

La négation de «$\exists x \in E : P(x)$)»est «$\forall x \in E : \overline{P(x)}$».

Exemples :

1)La négation de «$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est La proposition $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$

2)La négation de «$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$)» est «$\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$»

Exercice1 : Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes

1) $P\ "\left(2 \geq 1 \quad et \quad -1 \in \mathbb{N}\ \right)"$ 2) $Q\ "\left(\sqrt{3} \geq 2 \quad ou \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}\ \right)"$

3) $R\ "\forall x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0"$ 4) $M\ "\exists x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 3"$

5) $N\ "\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}"$

Solution :1)La proposition : $P\ "\left(2 \geq 1 \quad et \quad -1 \in \mathbb{N}\ \right)"$ est fausse

Car $"2 \geq 1\ "$ est vraie et $"-1 \in \mathbb{N}"$ est fausse

La négation de «$P\ "\left(2 \geq 1\, et\, -1 \in \mathbb{N}\ \right)"$) » est $\overline{P}\ "\left(2 \prec 1\, ou\, -1 \notin \mathbb{N}\ \right)"$

2)La proposition : $Q\ "\left(\sqrt{3} \geq 2 \quad ou \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}\ \right)"$ est vraie

Car $"\sqrt{3} \geq 2\ "$ est fausse et $"\sqrt{2} \notin \mathbb{N}"$ est vraie

La négation de «$Q\ "\left(\sqrt{3} \geq 2 \quad ou \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}\ \right)"$) » est $\overline{Q}\ "\sqrt{3} \prec 2 \quad et \quad \sqrt{2} \in \mathbb{N}"$

3)La proposition : $R\ "\forall x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0"$ est fausse

Car pour x=-1 : elle est fausse

La négation de «$R\ "\forall x \in \mathbb{R} / 2x \geq 0"$) » est $\overline{R}\ "\exists x \in \mathbb{R} / 2x \prec 0"$

4)La proposition : $M\ "\exists x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 3"$ est vraie

Car pour x=2 : elle est vraie

La négation de «$M\ "\exists x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 3"$» est $\overline{M}\ "\forall x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 3"$

5)La proposition : $N\ "\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}"$ est fausse

Car pour n=1 : elle est fausse

La négation de «$N\ "\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}"$» est $\overline{N}\ "\exists n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}"$

4. RAISONNEMENTS :

Voici des exemples de raisonnements :

1)Raisonnement direct : On veut montrer que La proposition « P ⇒ Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple : $x \in \mathbb{R}$;

Montrer que : $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 14 \leq 3x + 11 \leq 17$

Solution : $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3\times 1 \leq 3x \leq 3\times 2$

$$\Rightarrow 3 \leq 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow 3+11 \leq 3x + 11 \leq 6+11$$

$$\Rightarrow 14 \leq 3x + 11 \leq 17$$

2) Raisonnement par Contre-exemple :

Exemple : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 \prec x$

En posant : $x = \frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec \frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

3) Raisonnement par équivalence :

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie on montre que : « P ⇔ Q » est vraie et Q est vraie donc on déduit que P est vraie.

Exemple : Montrer que : $\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

Solution : $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

Et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ donc $\forall x > 0 \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$

4) Raisonnement par l'absurde :

Exemple : Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}): \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $(\exists x \in \mathbb{R}): \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

Comme $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$ alors $x^2 - 1 = x^2 + 1$

Donc $\boxed{-1 = +1}$

Cela conduit à une contradiction.

Conclusion : $(\forall x \in \mathbb{R}): \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien